САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Факультет компьютерных наук и информационных технологий

Кафедра теоретических основ информатики
и информационных технологий

“МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ”

Авторский курс профессора Прохорова Д.В.

2002

Содержание курса

Лекция 1

1. Организация курса математического анализа

Предлагаемый курс математического анализа предназначен для студентов математических и физических специальностей университета и рассчитан на 4 семестра. Математический анализ является базовым предметом для построения всей так называемой "непрерывной" ветви математического образования. В нем прослеживается развитие идей дифференциального и интегрального исчисления от скалярных функций одного переменного до векторных функций многих переменных и более общих пространств. Изучаются числовые и функциональные ряды, операции над ними, их роль и приложения в фундаментальных проблемах математики, физики и других наук. На современном научно-методическом уровне рассматривается теория интеграла, включающая в себя интеграл Лебега, интегралы, зависящие от параметра, криволинейные, поверхностные и интеграл Фурье.

По окончании курса студент должен владеть теоретическими знаниями, необходимыми для продолжения образования в области дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, функционального анализа, методов математической физики, теории вероятностей и статистики, численных методов, вариационного исчисления, методов оптимизации.

Лекции по теоретическим разделам сопровождаются практическими занятиями, на которых студенты овладевают навыками решения задач, иллюстрирующих теорию и имеющих самостоятельное значение. Освоение курса математического анализа предполагает, что студент готов использовать глубокие аналитические методы для решения широкого круга задач теоретического и практического содержания, способен участвовать в разработке серьезных научных и технических проблем в составе групп специалистов различного профиля.

Аттестация знаний студентов происходит в форме зачета по решению задач практического характера и экзамена по теоретическом вопросам. Как правило, зачет состоит в решении контрольных заданий по основным темам курса и проходит в письменном варианте или на компьютере. Экзамен более вариативен, он может проходить в виде собеседования, устных ответов, включающих определения фундаментальных понятий и доказательства теорем, но также возможен и письменный или компьютерный способ оценки уровня и качества знаний.

2. Рекомендуемая литература

Существует огромное количество учебников и разнообразных пособий по математическому анализу. Смеем утверждать, что большинство крупных ученых, специалистов в области непрерывной математики, стремилось донести свой опыт исследования и преподавания в книгах для студентов и даже школьников. Более того, лекторы по математическому анализу в ведущих университетах России и мира писали учебники, суммируя свои взгляды на построение лекционного процесса. Наконец, известно некоторое количество книг, написанных в рамках коммерческих проектов.

Естественно, все пособия различны по назначению и качеству исполнения. Но даже лучшее из изданного далеко не равноценно. Прежде всего заметим, что архитектура курса зависит от выбранного первичного набора понятий и их развития от простого к сложному. Поэтому на первых порах вряд ли следует пользоваться разнообразными по стилю книгами. Разумнее избрать одно или несколько однородных пособий, исповедующих сходные концепции, и близкие к изложению лектора университета.

Откроем список рекомендуемых учебников двумя авторами, широко известными учеными, преподававшими математический анализ в Московском университете и Московском физико-техническом институте.

1. С.М.Никольский, Курс математического анализа, Т.1-2, М.:Наука, 1975. 2. Л.Д.Кудрявцев, Математический анализ, Т.1-2, М.:Высшая Школа, 1973.

Дополним список бестселлером прошлых лет, постепенно утрачивающим прежнее абсолютное влияние, но по-прежнему содержащему неистощимый запас задач, примеров, размышлений, иллюстрирующих теоретические положения.

3. Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.1-3, М.:Наука, 1969.

Нелишне предложить двухтомник математиков, в разные периоды возглавлявших кафедру математического анализа Саратовского университета.

4. В.Ф.Емельянов, А.И.Барабанов, Д.В.Прохоров, Курс математического анализа, Т.1-2, Саратов: Издательство Саратовского университета, 1981.

Из зарубежных авторов выделим замечательных математиков А.Картана и Л.Шварца, написавших современные учебники высокого уровня полноты м строгости.

5. А.Картан, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, М.:Мир, 1971. 6. Л.Шварц, Анализ, Т.1-2, М.:Мир, 1972.

В отличие от учебников, список задачников по математическому анализу относительно скуден, зато он содержит нестареющий классический сборник Б.П.Демидовича.

7. Б.П.Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М,:Наука, 1966.

Удачным получился задачник математиков Московсого университета.

8. И.А.Виноградов, С.Н.Олехник, В.А.Садовничий, Задачи и упражнения по математическому анализу, М.:Издательство Московского университета, 1988.

3. Разделы элементарной математики в курсе математического анализа

Начала математического анализа входят в программу старших классов средней школы. Однако теория пределов, на которой основано исчисление бесконечно малых, слишком сложна, чтобы быть строго изложенной на элементарном языке. По этой причине университетский курс повторяет заново теорию последовательностей, предел и непрерывность функции, дифференциальное исчисление, понятие первообразной и ее свойства, интегральное исчисление.

Тем не менее курс высшей математики опирается на часть сведений, относящихся к аналитическому блоку среднего образования. Выделим следующие темы.

1. Принцип полной математической индукции.

Он заключается в проверке справедливости некоторого свойства $A = A(n)$ для всех натуральных чисел n. Применение полной математической индукции состоит в проверке справедливости свойства $A(1)$ для единицы, высказывании гипотезы о справедливости свойства $A(n)$ и проверке свойства $A(n+1)$ для числа $n+1$.

2. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Геометрическая прогрессия задается начальным элементом b и знаменателем q. Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если $|q| < 1$. Не вдаваясь на настоящем этапе в строгий смысл понятия суммы

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots$$

всех членов прогрессии, будем принимать, что она равна $b/(1-q)$.

3. Концепция действительного числа.Восприимем конструкцию, согласно которой всякое действительное а число изображается бесконечной десятичной дробью. Точнее,

$$a = a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots\ ,$$

где a_0 - целое число, называемое целой частью действительного числа a, а α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots$ - цифры 0, 1 , ..., 9. Рациональные числа изображаются периодическими дробями, иррациональным числам соответствуют непериодические разложения. В отдельных случаях возникает двойственное представление одного и того же действительного числа разными бесконечными десятичными дробями. Это происходит с числами, имеющими 0 или 9 в периоде. Именно, числа

$$a_0 + 0.\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n 99\ldots9\ldots, \qquad \alpha_n < 9,$$

и

$$a_0 + 0.\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n + 1)00\ldots0\ldots$$

равны между собой, поскольку

$$\alpha_0 + 0.\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n 99\ldots9 = \alpha_0 + 0.\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n 00\ldots0 + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \ldots$$

$$\alpha_0 + 0.\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n 00\ldots0 + \frac{9}{10^{n+1}(1-1/10)} = \alpha_0 + 0.\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n 00\ldots0 + \frac{1}{10^n}.$$

Если двойственное представление нежелательно, то условимся, например, что бесконечная десятичная дробь не имеет 9 в периоде.

Над действительными числами можно производить арифметические операции, хотя в средней школе не задаются вопросом о техническом исполнении действий над бесконечными десятичными дробями. Проиллюстрируем очевидный подход на примере сложения двух чисел

$$a = a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

и

$$b = b_0 + 0.\beta_1\beta_2...\beta_n... \ .$$

Складываем постепенно

$$a_0 + b_0,$$

$$(a_0 + 0.\alpha_1) + (b_0 + 0.\beta_1),$$

$$(a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2) + (b_0 + 0.\beta_1\beta_2)$$

и так далее. Обозначим

$$(a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) + (b_0 + 0.\beta_1\beta_2...\beta_n) = c_0{}^n + 0.\gamma_1{}^n\gamma_2{}^n...\gamma_n{}^n.$$

Целые числа $c_0{}^1$, $c_0{}^2$, ..., $c_0{}^n$, ... образуют неубывающую последовательность. Начиная с некоторого номера n_0, все числа $c_0{}^n$,$c_0{}^{n+1}$,... будут оставаться одинаковыми. Это число примем за c_0. Аналогично для всякого k цифры $\gamma_k{}^k$, $\gamma_k{}^{k+1}$, ..., $\gamma_k{}^n$, ... образуют неубывающую последовательность. Начиная с некоторого номера n_k, все цифры $\gamma_k{}^n$, $\gamma_k{}^{n+1}$, ... будут оставаться одинаковыми. Эту цифру примем за γ_k. Таким образом, появляется бесконечная десятичная дробь

$$c = c_0 + 0.\gamma_1\gamma_2...\gamma_n...,$$

равная сумме $a + b$.

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество всех действительных чисел. Арифметические операции над действительными числами подчиняются следующим условиям:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ - ассоциативность сложения;

2. $a + b = b + a$ - коммутативность сложения;

3. для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $a + 0 = a$ - роль 0 в сложении;

4. для любого a $\in \mathbb{R}$ существует число $(-a) \in \mathbb{R}$ такое, что $a + (-a) = 0$ - возможность вычитания;

5. $(ab)c = a(bc)$ - ассоциативность умножения;

6. $ab = ba$ - коммутативность умножения;

7. для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $1a = a$ - роль единицы в умножении;

8. для любого $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, существует число a^{-1} такое, что $aa^{-1} = 1$ - возможность деления;

9. $a(b + c) = ab + ac$ - дистрибутивность.

Пусть даны два действительных числа

$$a = a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

и

$$b = b_0 + 0.\beta_1\beta_2...\beta_n...,$$

десятичные записи которых не содержат 9 в периоде. Неравенство $a < b$ справедливо в том случае, если либо $a_0 < b_0$, либо существует номер n такой, что $a_0 = b_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$, но $\alpha_n < \beta_n$. Продолжим перечень свойств действительных чисел, относящихся к неравенствам:

10. если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ - транзитивность неравенств;

11. если $a < b$, то для любого $c \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $a + c < b + c$;

12. если $a < b$, то для любого $c > 0$ справедливо неравенство $ac < bc$.

Кроме того, очевидно свойство

13. для любого $a \in \mathbb{R}$ существует целое число k такое, что $a < k$ - аксиома Архимеда.

Отметим, что свойствам 1-13 удовлетворяет не только множество действительных чисел, но и множество рациональных чисел. В дальнейшем мы обнаружим еще одно свойство, которое присуще множеству $\mathbb{R}$, но не выполняется в множестве рациональных чисел.

4. Множества и действия над ними

Напомним известные операции над множествами.

Определение 1. *Множество C называется объединением множеств A и B*, $C = A \cup B$, *если C состоит из всех элементов, каждый из которых принадлежит A либо B*.

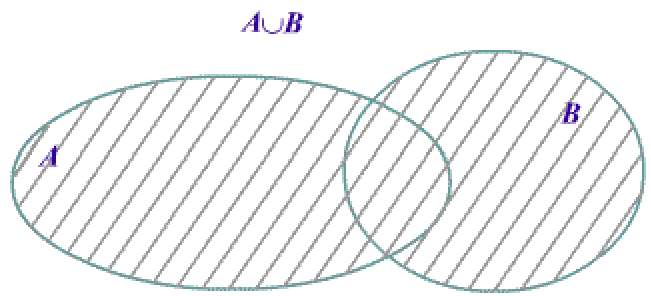


Рис. 1. Объединение множеств.

Определение 2. *Множество C называется пересечением множеств A и B*, $C = A \cap B$, *если C состоит из всех элементов, каждый из которых одновременно принадлежит A и B*.

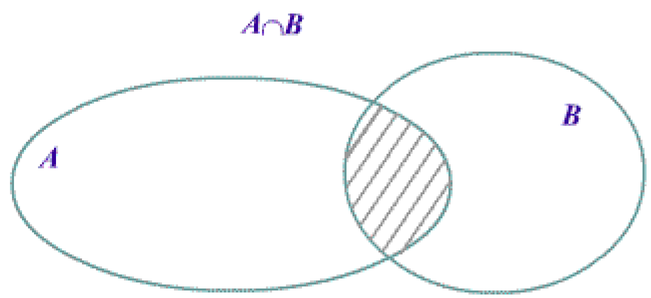


Рис. 2. Пересечение множеств.

<u>Определение 3.</u> *Множество C называется разностью множеств A и B, $C = A \setminus B$, если C состоит из всех элементов, каждый из которых принадлежит A, но не принадлежит B.*

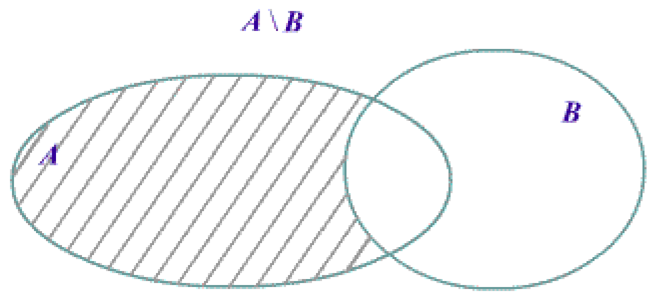


Рис. 3. Разность множеств.

В частности, если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называется дополнением B в A.

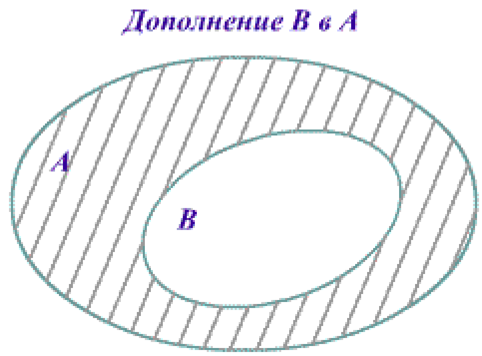


Рис. 4. Дополнение B в A.

Можно использовать и другие операции над множествами, однако нам в дальнейшем потребуются лишь определения 1-3.

Есть немало формул, связывающих различные операции между собой. Покажем, например, что если $B \subset A$, то $A = B \cup (A \backslash B)$, причем $B \cap (A \backslash B) = \varnothing$, где $\varnothing$ - пустое множество.

Действительно, если $x \in B$, то $x \notin A \backslash B$ и следовательно, B и $A \backslash B$ имеют пустое пересечение. Кроме того, если $x \in A$,то возможно одно из двух: либо $x \in B$, либо $x \in A \backslash B$. Таким образом,

$$A \subset (B \cup (A \backslash B)).$$

С другой стороны, если $x \in B$, то $x \in A$ и если $x \in A \backslash B$, то $x \in A$. Таким образом,

$$(B \cup (A \backslash B)) \subset A,$$

что вместе с предыдущим включением доказывает нужную формулу о совпадении A и $B \cup (A \backslash B)$.

5. Отображения множеств

Определим некоторые множества по их характеристикам.

Определение 4. *Отображение f: $X \to Y$ называется отображением множества X на множество Y, если для всякого элемента $y \in Y$ найдется элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.*

Обращаем внимание, что предлог "на" в определении 4 является частью названия. Другими словами, определение 4 ввело термин "отображение на".

Определение 5. *Отображение f: $X \to Y$ называется взаимно однозначным, если оно отображает X на Y и для всякого элемента $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.*

Очевидно, что только взаимно однозначное отображение допускает обратное отображение.

Определение 6. *Пусть f: $X \to Y$ - взаимно однозначное отображение. Тогда отображение g: $Y \to X$ называется обратным к f, если g всякому элементу $y \in Y$ сопоставляет такой элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$. Обозначим $g = f^{-1}$.*

Таким образом,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

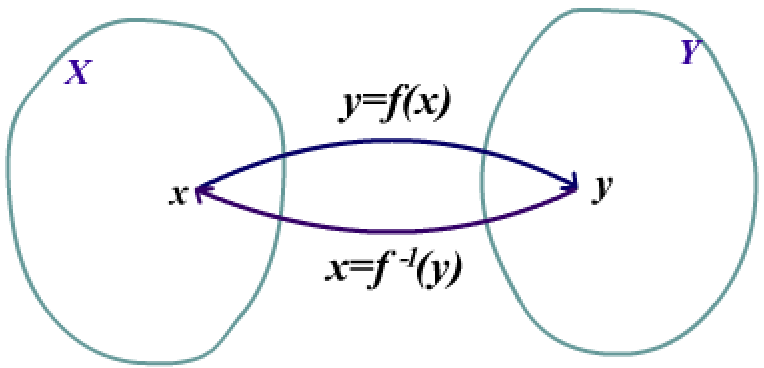


Рис. 5. Взаимно однозначное отображение.

Определение 7. *Пусть f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$. Тогда отображение h: $X \to Z$ называется сложным отображением, или композицией отображений f и g, $h = g \circ f$, если h отображает всякий элемент $x \in X$ на элемент $z \in Z$ такой, что $z = g(y)$, где $y = f(x)$.*

Операционно сложное отображение можно записать формулой $z = g(f(x))$.

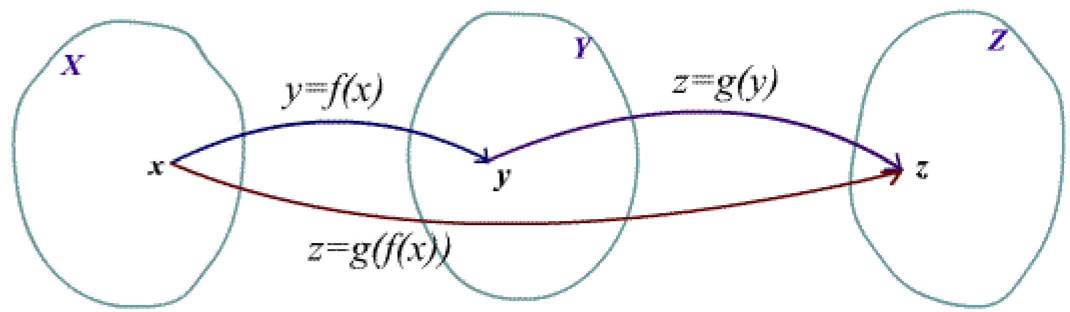


Рис. 6. Сложное отображение.

Лекция 2

1.Счетные множества и их свойства

Бесконечные множества разумно сравнивать друг с другом при помощи взаимно однозначных отображений.

<u>Определение 1.</u> *Множества X и Y называются равномощными, если существует взаимно однозначное отображение одного множества на другое. В качестве тестового множества для сравнения естественно брать самое простое, ясно устроенное множество, каким является, в частности, множество ℕ натуральных чисел* 1, 2, ..., *n*, ...

<u>Определение 2.</u> *Множество X называется счетным*, *если оно равномощно множеству* ℕ.

Взаимно однозначное отображение множества ℕ на счетное множество *X* логично установить, присвоив каждому элементу $x \in X$ номер в виде натурального числа.

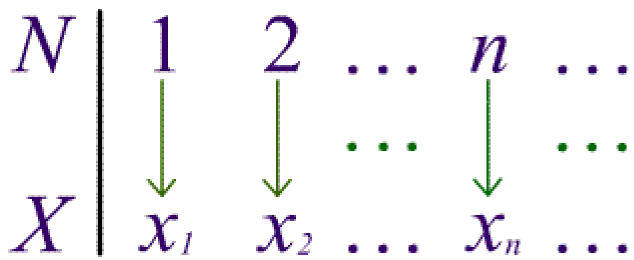


Рис. 1. Взаимно однозначное отображение

Установление такого отображения означает перечисление элементов счетного множества, записанного в форме последовательности. Эту мысль выразим предложением: *множество X счетно тогда и только тогда, когда его можно представить в виде последовательности с попарно различными элементами.*

Определим понятие подпоследовательности как подмножества последовательности, оставшегося после отбрасывания некоторых ее элементов.

Пусть дана последовательность

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Перечислим номера тех ее элементов, которые остались после отбрасывания части членов последовательности. Пусть n_1 - наименьший номер из оставшихся неотброшенными элементов, n_2 - второй по порядку номер из оставшихся неотброшенными элементов и так далее. Пусть n_k - это k-й по порядку номер из оставшихся неотброшенными элементов последовательности. Продолжим процедуру перечисления оставшихся неотброшенными элементов до бесконечности. Тогда последовательность

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots$$

состоит из всех элементов, оставшихся после процесса отбрасывания и расположенных в порядке возрастания их номеров. Она называется подпоследовательностью исходной последовательности (1).

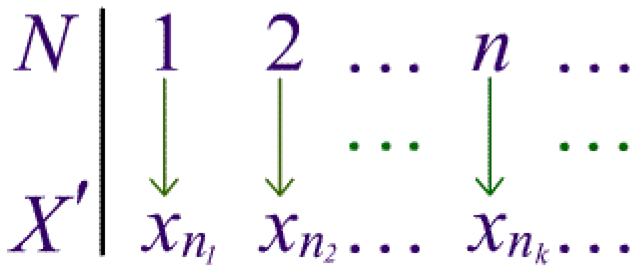


Рис. 2. Подпоследовательность исходной последовательности

2. Бесконечные подмножества счетного множества

Используем понятие подпоследовательности для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным множеством.*

Доказательство. Пусть X - счетное множество. Его можно представить в виде последовательности попарно различных элементов

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}.$$

Предположим, что X' - бесконечное подмножество множества X. Следовательно, X' можно представить в виде подпоследовательности

$$X' = \{x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}, ...\}.$$

Поскольку подпоследовательность X' в свою очередь является последовательностью попарно различных элементов, то X' - счетное множество, что доказывает теорему 1.

Теорема 1 показывает, что счетные множества - наиболее "бедные" из бесконечных множеств. Невозможно придумать бесконечное множество, содержащееся в счетном множестве X, но не равномощное X.

3. Счетное объединение счетных множеств

Теорема 1 рассматривает бесконечные подмножества счетного множества и утверждает, что они остаются счетными. Попытаемся теперь объединить счетные множества и покажем, что счетное объединение не приведет к появлению более мощного множества.

Теорема 2. *Объединение счетного множества счетных множеств является счетным множеством.*

Доказательство. Пусть каждое из множеств $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ является счетным. Образуем множество

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

и докажем, что X является счетным.

Каждое из счетных множеств представимо в виде последовательности попарно различных элементов. Поскольку каждое из объединяемых множеств имеет свой индекс, будем индексировать элементы последовательности двумя номерами: первый индекс отмечает номер объединяемого множества, второй индекс отмечает порядковый номер элемента последовательности

$$X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots\},$$

$$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$X_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}, \ldots\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

Множество X состоит из элементов, входящих в бесконечную матрицу с бесконечным числом строк и столбцов

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Смысл доказательства заключается в изобретении способа перечисления элементов матрицы (2) в виде последовательности. Предложим один из таких способов. Начнем перечисление с элемента x_{11}, находящегося в первой строки и первом столбце. Затем перечислим элементы, сумма индексов которых равна 3, то есть x_{12} и x_{21}. Следом за этим перечислим элементы, сумма индексов которых равна 4, то есть x_{13}, x_{22} и x_{31}. И так далее. На очередном k-м шаге перечислим элементы, сумма индексов которых равна $k + 1$, то есть x_{1k}, $x_{2(k-1)}$, ..., $x_{(k-1)2}$, x_{k1}. Будем продолжать процесс перечисления бесконечно. В итоге получится последовательность

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, \dots, x_{1k}, x_{2(k-1)}, \dots, x_{(k-1)2}, x_{k1}, \dots$$

которая содержит счетное множество элементов.

$$\cancel{x_1}, \cancel{x_2}, \dots, \cancel{x_{n_1-1}}, x_{n_1}, \cancel{x_{n_1+1}}, \dots, \cancel{x_{n_2-1}}, x_{n_2},$$
$$\cancel{x_{n_2+1}}, \dots, \cancel{x_{n_k-1}}, x_{n_k}, \cancel{x_{n_k+1}}, \dots$$
$$x_1, x_2, \dots, x_{n_k}, \dots$$

Рис. 3. Подпоследовательность

Каждый элемент бесконечной таблицы (2) на некотором этапе действий появится в строке (3). Следовательно, строка (3) содержит все элементы таблицы (2). Для того, чтобы выписать множество X, следует из последовательности (3) исключить повторяющиеся элементы, то есть отбросить элементы, появляющиеся в (3) второй раз, третий и так далее. Оставшееся множество бесконечно как объединение бесконечных множеств и поэтому по теореме1 оно является счетным как подмножество счетного множества (3), что доказывает теорему (2).

Применим теорему 2 для доказательства счетности множества рациональных чисел. Будем обозначать множество всех целых чисел через $\mathbb{Z}$, а множество всех рациональных чисел - через $\mathbb{Q}$.

Напомним, что рациональным числом называется отношение двух целых чисел. Значит, множество всех рациональных чисел состоит из несократимых дробей m/n, где m и n - целые числа. Очевидно, $n \neq 0$. Поскольку знак дроби зависит от комбинации знаков числителя и знаменателя, можно всегда считать, например, что $n > 0$, тогда как числитель m принимает значения положительные, отрицательные и нуль. Таким образом,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема 3. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно как объединение счетного множества $\mathbb{N}$, равномощного ему множества отрицательных целых чисел и множества $\{0\}$, состоящего только из нуля.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$\mathbb{Q}_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Множество $\mathbb{Q}_n$ равномощно множеству $\mathbb{Z}$ и поэтому оно счетно. Теперь по теореме 2 следует, что множество

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$$

счетно как счетное объединение счетных множеств, что доказывает теорему 3.

4. Несчетность множества действительных чисел

Покажем, что в отличие от множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел множество $\mathbb{R}$ действительных чисел не является счетным. Так как $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то $\mathbb{R}$ является более "мощным", чем $\mathbb{Q}$.

Теорема 4. *Множество $\mathbb{R}$ несчетно.*

Доказательство. Покажем, что множество $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \cap [0, 1)$ несчетно. Всякое число $a \in \mathbb{R}_0$ изображается бесконечной десятичной дробью с целой частью a_0, равной нулю. Проведем доказательство от противного. Предположим, что множество $\mathbb{R}_0$ счетно. Тогда его можно перечислить в виде элементов последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Каждое число a_n представимо бесконечной десятичной дробью без 9 в периоде. Запишем такие представления, снабдив цифры десятичного разложения двумя индексами: первый отмечает номер числа в последовательности, второй индекс отмечает порядковый номер цифры в десятичной дроби

$$a_1 = 0.\alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n}..., \tag{4}$$

$$a_2 = 0.\alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n}...,$$

....,

$$a_n = 0.\alpha_{n1}\alpha_{n2}...\alpha_{nn}...,$$

....

Создадим новую бесконечную десятичную дробь без 9 в периоде, которой нет в перечне (4). Для этого выберем какую-либо цифру, отличную от α_{11} и от 9, и обозначим ее через β_1. Далее выберем какую-либо цифру, отличную от α_{22} и от 9, и обозначим ее через β_2. И так далее. На n-м шаге выберем какую-либо цифру, отличную от α_{nn} и от 9, и обозначим ее через β_n. Продолжим процесс неограниченно.

В итоге получится бесконечная десятичная дробь

$$b = 0.\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

без 9 в периоде. Число b не равно a_1, так как первая цифра β_1 десятичной дроби b не равна первой цифре α_{11} десятичной дроби a_1 в первой строчке (4). Аналогично число b не равно a_2, так как вторая цифра β_2 десятичной дроби b не равна второй цифре α_{22} десятичной дроби a_2 во второй строчке (4). И так далее. На n-м шаге заключаем, что число b не равно a_n, так как n-я цифра β_n десятичной дроби b не равна n-й цифре α_{nn} десятичной дроби a_n в n-й строчке (4). Продолжим неограниченно сравнение b с числами в последовательности (4) и убедимся, что b не равно ни одному из чисел в (4). Таким образом, действительное число $b \in \mathbb{R}_0$ не перечислено в последовательности (4), что противоречит допущению о счетности множества $\mathbb{R}_0$.

Полученное противоречие доказывает, что множество $\mathbb{R}_0$ несчетно. Аналогично все множества $\mathbb{R}_m = \mathbb{R} \cap [m, m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$, несчетны. Следовательно, и множество $\mathbb{R} = \cup_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{R}_m$ несчетно, иначе бы его бесконечные подмножества $\mathbb{R}_m$ оказались бы счетными. Теорема 4 доказана.

Определение 3. *Говорят, что множество $\mathbb{R}$ имеет мощность continuum.*

Лекция 3

1. Лемма об элементарном переходе к пределу в неравенствах

Мы построим вскоре строгую теорию последовательностей, в которой, в частности, сформулируем и докажем теорему о переходе к пределу в неравенствах. Однако предварительно мы должны вывести свойство полноты множества действительных чисел, а при этом нам необходимо воспользоваться элементарным правилом предельного перехода в неравенстве. Приведем это правило в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть действительное число a для всех натуральных n удовлетворяет неравенству*

$$a \le \frac{1}{10^n}. \tag{1}$$

Тогда $a \le 0$.

Пусть функции f и g дифферецируемы в точке x_0. Тогда функции $f + g$, $f - g$, fg и f/g дифференцируемы в точке x_0 и справедливы формулы

Прокомментируем утверждение леммы 1. Интуитивно угадываем, что $1/10^n$стремится к 0 при $n \to \infty$. Будь в нашем распоряжении теорема о переходе к пределу в неравенствах, мы применили бы ее к неравенству (1) и получили требуемое утверждение. Однако такая общая теорема не создана, как и весь аппарат теории пределов, поэтому приходится доказывать лемму 1 доступными на этом этапе средствами.

Доказательство леммы 1. Число a представимо бесконечной десятичной дробью

(2) $$a = a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \,.$$

Целое число a_0 не может быть положительным, так как в противном случае справедливо неравенство $a \geq a_0 \geq 1$, противоречащее условию леммы для $n = 1$.

Если принять, что $a_0 < 0$, то утверждение леммы 1 становится очевидным.

Предположим, что $a_0 = 0$. Теперь цифра α_1 не может быть положительной, так как в противном случае справедливо неравенство $a \geq 0.\alpha_1 \geq 0.1$, противоречащее условию леммы 1 при $n = 2$. Следовательно, $\alpha_1 = 0$.

Если $a_0 = 0$ и $\alpha_1 = 0$, то цифра α_2 не может быть положительной, так как в противном случае справедливо неравенство $a \geq 0.0\alpha_2 \geq 0.01$, противоречащее условию леммы 1 при $n = 3$. Следовательно, $\alpha_2 = 0$.

Предположим, что существует наименьшее натуральное число k такое, что цифра α_k положительна. Тогда справедливо неравенство

$$a \geq 0.00...0\alpha_k \geq 0.00...01,$$

противоречащее условию леммы 1 при $n = k + 1$. Полученное противоречие опровергает предположение, что $\alpha_k > 0$. Таким образом, если в представлении (2) $a_0 = 0$, то все цифры α_k, $k \in \mathbb{N}$, равны нулю, а это означает, что $a = 0$. Лемма 1 доказана.

2. Границы и грани множества

Важными примерами множеств на числовой оси $\mathbb{R}$ служат отрезки $[a, b]$,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b\},$$

интервалы (a, b),

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\},$$

а также промежуточные множества $[a, b)$ и $(a, b]$, которые можно назвать полуотрезками или полуинтервалами,

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \le x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \le b\}.$$

Во всех четырех примерах точки a и b являются граничными. Приведем более точные определения.

Определение 1. *Число M называется верхней границей множества $X \subset \mathbb{R}$, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \le M$.*

Определение 1 верхней границы - первое в ряду многочисленных вводимых понятий математического анализа. В целях придания им унифицированной логической структуры будем в дальнейшем использовать два наиболее употребительных квантора, дающих количественную характеристику области истинности предиката: квантор всеобщности $\forall x$, означающий "для всех x", и квантор существования $\exists x$, означающий "существует x" или "для некоторого x".

Таким образом, согласно определению 1, M - верхняя граница множества X, если

$$\forall x \in X \;\; x \le M.$$

Определение 2. *Число m называется нижней границей множества $X \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall x \in X \;\; x \ge m.$$

Определение 3. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если X имеет верхнюю границу, то есть если*

$$\exists M \; \forall x \in X \;\; x \le M.$$

Множество X называется ограниченным снизу, если X имеет нижнюю границу, то есть если

$$\exists m \; \forall x \in X \;\; x \ge m.$$

Множество X называется ограниченным, если X ограничено сверху и снизу.

Очевидно, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних границ. Действительно, если M - верхняя граница X и $M' > M$, то M' - тоже верхняя граница X, так как $\forall x \in X \;\; x \le M < M'$. Аналогично ограниченное снизу множество имеет бесконечно много нижних границ. Определим самые точные границы множества.

<u>Определение 4.</u> *Наименьшая из верхних границ множества X называется точной верхней границей, или верхней гранью множества X и обозначается* $\sup X$.

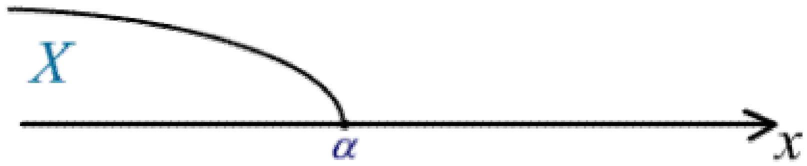


Рис. 1. Верхняя грань множества.

<u>Определение 5.</u> *Наибольшая из нижних границ множества X называется точной нижней границей, или нижней гранью множества X и обозначается* $\inf X$.

Вопрос существования верхней и нижней граней множества заслужмвает отдельного детального обсуждения. Но прежде подвергнем логическому анализу определения 4 и 5.

Верхняя грань $\alpha = \sup X$ множества X характеризуется двумя условиями:

1. $\forall x \in X \;\; x \le \alpha$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in X \;\; x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.

Первое условие означает, что α - верхняя граница множества X. Второе условие означает, что как только α уменьшено на ε, меньшее число $\alpha - \varepsilon$ перестает быть верхней границей множества X. Аналогично охарактеризуем нижнюю грань.

$\beta = \inf X$, если выполняются два условия:

1. $\forall x \in X \;\; x \ge \beta$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X\ \ x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.

Первое условие означает, что β - нижняя граница множества X, а второе условие означает, что как только β увеличено на ε, большее число $\beta + \varepsilon$ перестает быть нижней границей множества X.

3. Теорема существования верхней грани

В лекции 1 перечислены 13 основных свойств действительных чисел. В аксиоматической теории эти свойства служат определением множества $\mathbb{R}$, если добавить к ним условие нетривиальности $1 \neq 0$ и следующую аксиому полноты.

14. Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань.

Поскольку мы приняли конструктивную концепцию множества $\mathbb{R}$ как множества всех бесконечных десятичных дробей, то обязаны проверить свойство 14, а не принимать в виде аксиомы.

Теорема 1. *Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань.*

Доказательство. Множество X непустое, значит, имеется элемент $x \in X$. Выберем целое число m, меньшее, чем x. Оно не может быть верхней границей X, так как $x > m$. Кроме того, множество X ограничено сверху, поэтому имеет верхнюю границу M'. Выберем целое число M, большее, чем M'. Число M также является верхней границей X.

Таким образом, выбраны два целых числа m и M, из которых m не является верхней границей X, а M является верхней границей X. Между m и M находится конечный набор целых чисел. Перебирая их по очереди, найдем два соседних целых числа a_0 и $a_0 + 1$, из которых a_0 не является верхней границей X, а $a_0 + 1$ является верхней границей X.

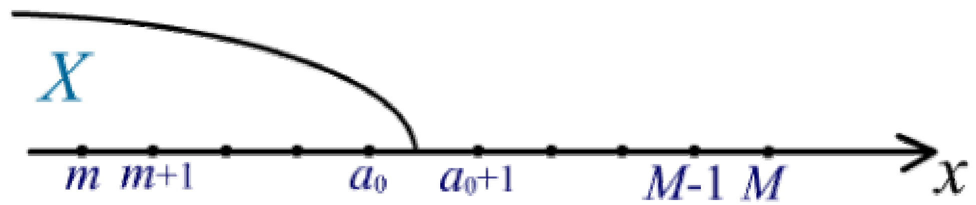


Рис. 2. Наименьшее из целых чисел, являющееся верхней границей.

Разделим отрезок $[a_0, a_0 + 1]$ на 10 равных частей. Перебирая точки деления по очереди, найдем две соседние точки $a_0 + 0.\alpha_1$ и $(a_0 + 0.\alpha_1) + 1/10$, из которых $a_0 + 0.\alpha_1$ не является верхней границей X, а $(a_0 + 0.\alpha_1) + 1/10$ является верхней границей X.

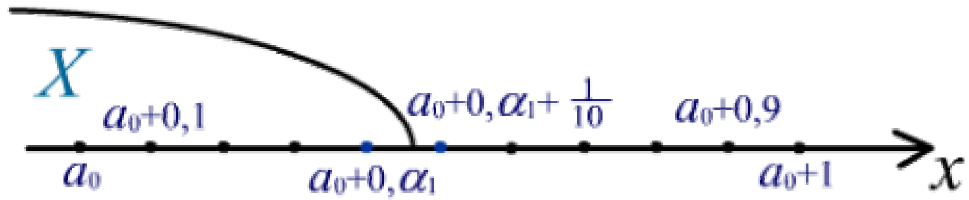


Рис. 3. Наименьшее из чисел вида $a + 0.1b$, где a, b - целые, являющееся верхней границей.

Снова разделим отрезок

$$[a_0 + 0.\alpha_1, (a_0 + 0.\alpha_1) + 1/10]$$

на 10 равных частей. Перебирая точки деления по очереди, найдем две соседние точки

$$A_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \text{ и } (a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2) + 1/100,$$

из которых $a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2$ не является верхней границей X, а $(a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2) + 1/100$ является верхней границей X.

Продолжаем процесс неограниченно. На n-м шаге действия разделим отрезок

$$[a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}, (a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}) + 1/10^{n-1}]$$

на 10 равных частей. Перебирая точки деления по очереди, найдем две соседние точки

$$a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n \text{ и } (a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n) + 1/10^n,$$

из которых первая не является верхней границей X, а вторая является верхней границей X.

Процесс продолжается и далее. В итоге получается действительное число α, изображаемое бесконечной десятичной дробью

$$\alpha = a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...,$$

которое для всякого натурального n удовлетворяет условиям:

1. $a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ не является верхней границей X;

2. $(a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) + 1/10^n$ является верхней границей X.

Кроме того, для любого натурального n справедливы неравенства

$$a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n \le \alpha \le (a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) + \frac{1}{10^n}, \tag{3}$$

поскольку левая часть в (3) - это округление α по недостатку, а правая часть в (3) - это округление α по избытку.

Покажем, что $\alpha = \sup X$. Сначала убедимся, что α - верхняя граница X. Действительно, всякий элемент $x \in X$ не превосходит любой верхней границы X, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x \le (a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) + \frac{1}{10^n},$$

которое в силу неравенства (3) влечет неравенство

$$x - \alpha \le x - (a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) \le \frac{1}{10^n}.$$

Применяем к последнему неравенству лемму 1 и заключаем, что

$$x - \alpha \le 0,$$

то есть α - верхняя граница X.

Теперь покажем, что α - наименьшая из верхних границ X. Действительно, всякая верхняя граница β множества X превосходит число, которое не является верхней границей X, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\beta > a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n,$$

которое в силу неравенства (3) влечет неравенство

$$\alpha - \beta \le (a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) + \frac{1}{10^n} - \beta < \frac{1}{10^n}.$$

Применяем к последнему неравенству лемму 1 и заключаем,что

$$\alpha - \beta \le 0,$$

то есть α - наименьшая из верхних границ X. Таким образом, мы показали, что $\alpha = \sup X$ и доказали тем самым теорему 1.

4. Соотношение между гранями множества

Теорема 1 сформулирована и доказана лишь для верхней грани множества. Теорема существования нижней грани требует отдельной формулировки и аналогичного доказательства. Вместо построения аналогий мы установим соотношения между гранями множеств и выведем теорему о нижней грани, опираясь на теорему 1.

Наряду с множеством X рассмотрим множество

$$-X = \{x\colon (-x) \in X\},$$

состоящее из всех элементов множества X, умноженных на (-1). Множество X имеет верхнюю границу M тогда и только тогда, когда множество $-X$ имеет нижнюю границу $(-M)$, так как неравенства $x < M$ и $-x > -M$ равносильны. Аналогично множество X имеет нижнюю границу m тогда и только тогда, когда множество $-X$ имеет верхнюю границу $(-m)$.

Подобным образом наблюдаем, что множество X имеет наименьшую верхнюю границу α тогда и только тогда, когда множество $-X$ имеет наибольшую нижнюю границу $(-\alpha)$, и X имеет наибольшую нижнюю границу β тогда и только тогда, когда $-X$ имеет наименьшую верхнюю границу $(-\beta)$.

Проведенные рассуждения убеждают в справедливости соотношений

$$\sup X = -\inf(-X), \qquad \inf X = -\sup(-X).$$

Теорема 2. *Всякое непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть множество X непусто и ограничено снизу. Тогда множество $-X$ также непусто, но ограничено сверху. По теореме 1 множество $-X$ имеет верхнюю грань α, а следовательно, множество $-X$ имеет нижнюю грань $-\alpha$. Теорема 2 доказана.

Выглядят вполне разумными следующие договоренности в определении верхних и нижних граней неограниченного или пустого множества.

1. Пусть множество X не ограничено сверху. Тогда полагаем $\sup X = \infty$.

2. Пусть множество X не ограничено снизу. Тогда полагаем $\inf X = -\infty$.

3. Пусть $X = \varnothing$. Тогда полагаем $\sup X = -\infty$ и $\inf X = \infty$.

Лекция 4

1. Предел последовательности

Следуя историческому ходу развития оснований математического анализа, от интуитивного и описательного восприятия понятия предела, принятого на раннем этапе обучения, перейдем к логически строгому определению, восходящему к Коши.

Определение 1. *Число l называется пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \ |x_n - l| < \varepsilon,$$

и обозначается $l = \lim_{n\to\infty} x_n$.*Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае - расходящейся.*

Число $\varepsilon > 0$ служит мерой близости x_n и l. Определение 1 устанавливает, что x_n приближается к l с любой мерой точности, начиная с некоторого номера n_0. Естественно, n_0 зависит от ε.

Обратим внимание, что квантор всеобщности $\forall \varepsilon > 0$ допускает простые обобщения определения 1. Именно, пусть $C > 0$ - фиксированное число. Если ε принимает все положительные значения, то $C\varepsilon$ также принимает всевозможные положительные значения. Поэтому определение 1 можно перефразировать в следующем виде: $\lim_{n\to\infty} = l$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \ |x_n - l| < C\varepsilon.$$

Выгода строгого определения заключается, помимо прочего, в проникновении логики и правил вывода в математические доказательства. Для упражнения в логической эквилибристике дадим отрицание определения 1: *число l не является пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *если*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \exists n > n_0 \ \ |x_n - l| \geq \varepsilon.$$

Покажем элементарное применение определения 1 к нахождению пределов простых последовательностей. Пусть, например, $x_n = 1/n$ и найдем, что

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Неравенство $|x_n - l| < \varepsilon$ становится эквивалентным неравенству

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \ \text{ или } \ n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Выбирая в качестве n_0 целое число, большее, чем $1/\varepsilon$, убеждаемся в выполнении определения 1.

Аналогичным образом находим, в частности, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad (k > 0), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0, \qquad (a > 1).$$

2. Единственность предела сходящейся последовательности

Начнем с доказательства единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема 1. *Если последовательность сходится, то она имеет единственный предел.*

Доказательство. Пусть сходящаяся последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ имеет пределы l и p. Согласно определению 1 применительно к l

(1) $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \ \forall n > n_1 \ \ |x_n - l| < \varepsilon.$$

Аналогично применим определение 1 к пределу p

(2) $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \ \forall n > n_2 \ \ |x_n - p| < \varepsilon.$$

Числа n_1 и n_2 в (1) и (2) в общем случае разные. Желая одновременного выполнения (1) и (2), обозначим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и будем рассматривать $n > n_0$. Для таких n выполнены (1) и (2) и справедливы неравенства

$$|l - p| = |l - x_n + x_n - p| \le |l - x_n| + |x_n - p| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

или, учитывая лишь крайние звенья цепочки, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|l - p| < 2\varepsilon.$$

В частности, выбирая любые $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon = (1/2)(1/(10^n))$, по лемме 1 лекции 3 видим, что $|l - p| \le 0$. А поскольку модуль числа не может быть отрицательным, то $|l - p| = 0$ и значит, $l = p$, что доказывает теорему 1.

3. Ограниченность сходящейся последовательности

Продолжим построение теории последовательностей исследованием взаимосвязей между различными свойствами такими, как сходимость, ограниченность, монотонность и другими. Сначала покажем, что сходимость последовательности влечет ее ограниченность, или другими словами, требование сходимости является более жестким по отношению к требованию ограниченности последовательности.

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится. Обозначим ее предел через l и запишем определение 1

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n - l| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - l| < \varepsilon$ равносильно системе двух неравенств $-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon$ или $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$, которая означает, что все x_n с номерами $n > n_0$ попадают внутрь интервала $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

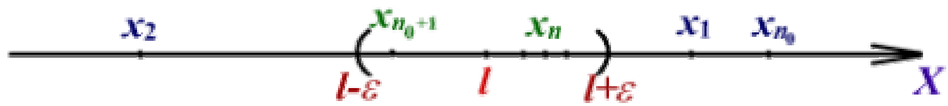


Рис. 1. Иллюстрация к теореме об ограниченности сходящейся последовательности.

Таким образом, множество элементов

$$\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots, x_n, \ldots\}$$

ограничено, поскольку оно содержится в интервале $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Но множество всех элементов последовательности является объединением ее частей

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, \ldots, x_n, \ldots\},$$

из которых второе множество ограничено, а первое состоит из конечного набора элементов и поэтому ограничено. Заметим, что объединение двух ограниченных множеств ограничено, потому что каждое из них содержится в своем отрезке, а значит, объединение содержится в большем отрезке, включающем в себя оба предыдущих. Следовательно, множество всех элементов последовательности ограничено, что доказывает теорему 2.

4. Сходимость монотонной ограниченной последовательности

Напомним определение монотонной последовательности.

Определение 2. *Последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *называется · неубывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \le x_{n+1}$; *· возрастающей, или строго возрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n < x_{n+1}$; *· невозрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \ge x_{n+1}$; *· убываюшей, или строго убывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n > x_{n+1}$; *· монотонной, если она не убывает или не возрастает*; *· строго монотонной, если она строго возрастает или строго убывает*.

Теперь покажем, что монотонность и ограниченность в совокупности влекут сходимость последовательности.

Теорема 3. *Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Формулировка теоремы 3 содержит два предложения: одно для неубывающих последовательностей, другое - для невозрастающих. Симметричность обоих доказательств бесспорна, поэтому изберем, например, случай неубывающей последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$, полагая, что второй случай ему подобен.

Коль скоро последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ограничена, множество ее элементов имеет верхнюю грань. Обозначим

$$\alpha = \sup_{n \ge 1} x_n$$

и докажем, что

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Число α удовлетворяет двум условиям:

1. $\forall n\ \ x_n \le \alpha$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_{n_0}\ \ x_{n_0} > \alpha - \varepsilon$.

В силу монотонности последовательности заключаем, что $\forall n > n_0\ \ x_n \ge x_{n_0}$.

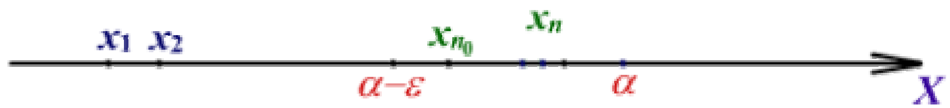


Рис. 2. Иллюстрация к теореме о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

Собираем все перечисленные свойства и выражаем их совокупно логическим предложением

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ \alpha - \varepsilon < x_n \le \alpha.$$

Система неравенств $\alpha - \varepsilon < x_n \le \alpha$ влечет неравенство $|x_n - \alpha| < \varepsilon$, поэтому последнее предложение означает, что $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$, доказывающее теорему 3.

Как часто случается, доказательство теоремы несет больше информации, чем ее формулировка. Так, в теореме 3 утверждалось лишь существование предела монотонной ограниченной последовательности, но в доказательстве указано выражение для этого предела. Именно,

если последовательность не убывает, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\ge 1} x_n;$$

если последовательность не возрастает, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq 1} x_n.$$

Сделаем общее замечание о том, что все предельные закономерности, наблюдаемые у последовательности, проявляются не обязательно с первого момента, а начиная с некоторого номера. Поэтому, говоря о сходимости монотонной ограниченной последовательности, можем допустить в условии теоремы 3, что последовательность монотонна, начиная с некоторого номера n_0, и ограничена. При этом заключение теоремы 3 о ее сходимости остается в силе.

Проанализируем, что произойдет, если в теореме 3 отказаться от условия ограниченности. Пусть, например, последовательность $x_1, x_2, ..., x_n,...$ не убывает и не ограничена. В силу монотонности ее первый элемент x_1 является минимальным, поэтому неограниченность этой последовательности означает неограниченность сверху, что можно логически записать в виде

$$\forall M \exists n_M\, x_{n_M} > M.$$

Учтем, что благодаря монотонности $x_n \geq x_{n_M}$ для $n > n_M$, и запишем

$$\forall M\ \exists n_M\ \forall n > n_M\ \ x_n > M.$$

Последнее предложение естественно принять за определение бесконечного предела последовательности.

<u>Определение 3.</u> *Будем говорить*, *что* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *если*

$$\forall M\ \exists n_M\ \forall n > n_M\ \ x_n > M.$$

Симметрично определим предел, равный $-\infty$.

<u>Определение 4.</u> *Будем говорить*, *что* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall m\ \exists n_m\ \forall n > n_m\ \ x_n < m.$$

Принимая во внимание определения 3 и 4 и проведенные рассуждения, заключаем, что если последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ не убывает и не ограничена, то $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

если последовательность $x_1, x_2, ..., x_n,...$ не возрастает и не ограничена, то $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Лекция 5

1. Арифметические действия над последовательностями

По аналогии с действительными числами определим арифметические действия над последовательностями.

Определение 1. *Пусть даны последовательности* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *и* $y_1, y_2, ..., y_n, ...$. *Последовательность* $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ *называется* · *суммой двух данных последовательностей, если* $z_n = x_n + y_n, \quad n \geq 1$; · *разностью двух данных последовательностей, если* $z_n = x_n - y_n, \quad n \geq 1$; · *произведением двух данных последовательностей, если* $z_n = x_n y_n, \quad n \geq 1$; · *частным двух данных последовательностей, если* $z_n = x_n/y_n, \quad n \geq 1$, *при условии, что* $y_n \neq 0$ *для всех натуральных* n.

Аналогия между арифметическими действиями в $\mathbb{R}$ и во множестве последовательностей не абсолютная из-за чрезмерного запрета в операции деления. Если в пространстве $\mathbb{R}$ деление позволительно на любое ненулевое число, то во множестве последовательностей ограничение на деление касается всякой последовательности, у которой хотя бы один элемент равен нулю.

2. Бесконечно малые последовательности и их свойства

Среди всех сходящихся последовательностей выделим те, которые сходятся к нулю. Их роль похожа на роль нуля в пространстве $\mathbb{R}$.

Определение 2. *Последовательность* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *называется бесконечно малой, если* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Используя понятие предела последовательности, переформулируем определение 2 на логическом языке.

Последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *называется бесконечно малой, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n| < \varepsilon.$$

Сравнивая определения последовательности, имеющей предел l, и бесконечно малой последовательности, приходим к заключению:

последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ сходится к пределу l тогда и только тогда, когда последовательность $x_1 - l, x_2 - l, ..., x_n - l, ...$ является бесконечно малой.

Докажем лемму о свойствах суммы бесконечно малых последовательностей и их произведения на ограниченные последовательности.

Лемма 1. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей и произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную являются бесконечно малыми последовательностями.*

Доказательство. Лемма 1 разделяется на два независимых утверждения, которые будем доказывать порознь.

1. Пусть последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ - бесконечно малые. Это означает, что

(1) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1\ \forall n > n_1\ \ |x_n| < \varepsilon$$

и

(2) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2\ \forall n > n_2\ \ |y_n| < \varepsilon.$$

Номера n_1 и n_2 в общем случае разные. Желая одновременного выполнения обоих условий, обозначим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и будем рассматривать $n > n_0$. Складывая неравенства в условиях (1) и (2), приходим к выводу, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

который означает, что $\lim n{\to}\infty(x_n + y_n) = 0$ и доказывает первое утверждение леммы 1.

2. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ - бесконечно малая, а последовательность $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ - ограниченная. Это означает, что

(3) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n| < \varepsilon$$

и

(4) $$\exists M\ \forall n\ \ |y_n| \le M.$$

Перемножая неравенства в условиях (3) и (4), приходим к выводу, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n y_n| < M\varepsilon,$$

который означает, что $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$ и доказывает второе утверждение леммы 1.

Из первого части теоремы 1 индуктивными рассуждениями непосредственно выводим, что сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей остается бесконечно малой.

Обратим внимание, что во второй части леммы 1 не утверждается, что произведение бесконечно малых последовательностей является бесконечно малым. В действительности второе утверждение леммы 1 - более сильное.

Следствие 1. *Произведение бесконечно малых последовательностей является бесконечно малым.*

Доказательство. Бесконечно малые последовательности являются сходящимися и поэтому ограниченными. Значит, произведение двух бесконечно малых последовательностей можно рассматривать как произведение двух последовательностей, из которых одна бесконечно малая, а другая ограниченная. Тогда из леммы 1 следует, что это произведение является бесконечно малым. Следствие 1 доказано.

3. Арифметические действия над сходящимися последовательностями

С помощью леммы 1 перенесем арифметические действия над последовательностями на аналогичные действия над их пределами.

Теорема 1. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *и* $\lim_{n\to\infty} y_n = p$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = l + p;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = l - p;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = lp.$$

Если кроме того, $y_n \neq 0$ *для всех натуральных* n *и* $p \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{p}.$$

Доказательство. Теорема 1 объединяет качественные утверждения о сходимости результатов арифметических действий над сходящимися последовательностями и количественные сведения об их пределах. Будем проводить рассуждения одновременно качественные и количественные. Заметим, что условия теоремы 1 эквивалентны тому, что последовательности

$$x_1 - l,\ x_2 - l,\ \ldots,\ x_n - l,\ \ldots \quad \text{и} \quad y_1 - p,\ y_2 - p,\ \ldots,\ y_n - p,\ \ldots$$

бесконечно малые.

Разделим доказательства по каждому арифметическому действию.

1. По лемме 1 заключаем, что сумма

$$x_1 + y_1 - (l + p),\ x_2 + y_2 - (l + p),\ \ldots,\ x_n + y_n - (l + p),\ \ldots$$

двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой, а значит, $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = l + p$, что доказывает первое утверждение теоремы 1.

2. Умножим бесконечно малую последовательность

$$y_1 - p,\ y_2 - p,\ \ldots,\ y_n - p,\ \ldots$$

на ограниченную последовательность –1, –1, ..., –1, ... и получим бесконечно малую последовательность. По лемме 1 заключаем, что сумма

$$x_1 - y_1 - (l - p),\ x_2 - y_2 - (l - p),\ \ldots,\ x_n - y_n - (l - p),\ \ldots$$

двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой, а значит, $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = l - p$, что доказывает второе утверждение теоремы 1.

3. Пользуясь формулой

$$x_n y_n - lp = (x_n - l + l)(y_n - p + p) - lp = (x_n - l)(y_n - p) + p(x_n - l) + l(y_n - p),$$

заключаем, что последовательность

(5) $$x_1 y_1 - lp,\ x_2 y_2 - lp,\ \ldots,\ x_n y_n - lp,\ \ldots$$

равна сумме трех последовательностей

$$(x_1 - l)(y_1 - p),\ (x_2 - l)(y_2 - p),\ \ldots,\ (x_n - l)(y_n - p),\ \ldots,$$

$$p(x_1 - l),\ p(x_2 - l),\ \ldots,\ p(x_n - l),\ \ldots \quad \text{и} \quad l(y_1 - p),\ l(y_2 - p),\ \ldots,\ l(y_n - p),\ \ldots,$$

из которых первая является произведением двух бесконечно малых последовательностей, а вторая и третья - произведения постоянных (то есть ограниченных) и бесконечно малых последовательностей. Следовательно, все три последовательности - бесконечно малые. По лемме 1 последовательность (5) - бесконечно малая, а $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = lp$, что доказывает третье утверждение теоремы 1.

4. Пользуясь формулой

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{l}{p} = \frac{px_n - ly_n}{py_n} = \frac{p(x_n - l) - l(y_n - p)}{py_n},$$

заключаем, что последовательность

(6) $$\frac{x_1}{y_1}-\frac{l}{p},\frac{x_2}{y_2}-\frac{l}{p},\ldots,\frac{x_n}{y_n}-\frac{l}{p},\ldots$$

равна сумме двух последовательностей

(7) $$\frac{x_1-l}{y_1},\frac{x_2-l}{y_2},\ldots,\frac{x_n-l}{y_n},\ldots \quad и \quad \frac{-l(y_1-p)}{py_1},\frac{-l(y_2-p)}{py_2},\ldots,\frac{-l(y_n-p)}{py_n},\ldots.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} y_n = p$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ \ |y_n-p|<\varepsilon.$$

Из неравенства

$$|p|-|y_n|\le|y_n-p|<\varepsilon$$

следует, что

$$|y_n|>|p|-\varepsilon.$$

Напомним, что $p\neq 0$. Выберем

$$\varepsilon=\frac{|p|}{2}>0$$

и находим, что для $n>n_0$ справедливо неравенство

$$|y_n|>|p|-\frac{|p|}{2}=\frac{|p|}{2},$$

а следовательно,

$$\frac{1}{|y_n|}<\frac{2}{|p|}.$$

Последнее неравенство выражает свойство ограниченности множества

$$\left\{\frac{1}{y_{n_0+1}},\dots,\frac{1}{y_n},\dots\right\},$$

а значит, и ограниченности множества

$$\left\{\frac{1}{y_1},\frac{1}{y_2},\dots,\frac{1}{y_n},\dots\right\}=\left\{\frac{1}{y_1},\frac{1}{y_2},\dots,\frac{1}{y_{n_0}}\right\}\cup\left\{\frac{1}{y_{n_0+1}},\dots,\frac{1}{y_n},\dots\right\},$$

которое объединяет одно конечное (то есть ограниченное) и другое ограниченное множества. Окончательно получили, что обе последовательности (7) бесконечно малы, потому что каждая из них представляет собой произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей. По лемме 1 последовательность (6) бесконечно мала и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{l}{p},$$

что доказывает четвертое утверждение теоремы 1.

4. Переход к пределу в неравенстве

Докажем теорему о правиле перехода к пределу в неравенстве.

Теорема 2. *Пусть* $\lim_{n\to\infty}x_n = l$ *и* $\lim_{n\to\infty}y_n = p$ *и для всех натуральных* n *справедливы неравенства*

$$x_n \le y_n.$$

Тогда $l \le p$.

Доказательство. Дадим логические определения пределов, упомянутых в формулировке теоремы 2,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_1\ \forall n>n_1\ \ |x_n-l|<\varepsilon$$

и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2\ \forall n > n_2\ \ |y_n - p| < \varepsilon.$$

Желая выполнения обоих неравенств, обозначим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и будем рассматривать $n > n_0$. Теперь из тождества

$$l - p = (l - x_n) + (x_n - y_n) + (y_n - p),$$

в правой части которого первая и третья скобки не превосходят ε, а вторая не превосходит нуля, следует,что

$$l - p < 2\varepsilon.$$

Полагая, например, $\varepsilon = (1/2)(1/(10^n))$, для любого натурального n получаем неравенство

$$l - p < \frac{1}{10^n}.$$

По лемме 1 лекции 3 получаем $l - p \le 0$, что доказывает теорему 2.

Лемма 1 лекции 3 является весьма частным случаем теоремы 2, так как $1/10^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что условие теоремы 2 допускает ослабление в выполнении неравенства $x_n \le y_n$, которому достаточно быть справедливым не для всех натуральных n, а начиная с некоторого номера n_0.

5. Сходимость последовательности, ограниченной двумя последовательностями с одинаковыми пределами

Сформулируем еще одну теорему о неравенствах, полезную во многих случаях.

Теорема 3. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = l$ *и для всех натуральных n справедливы неравенства*

$$x_n \le y_n \le z_n.$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = l.$

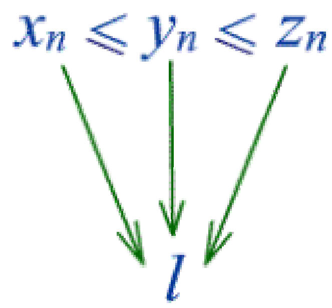


Рис. 1. Сходимость последовательности, ограниченной двумя последовательностями с одинаковыми пределами.

Теорема 3 известна своими фольклорными названиями. Так, в российском преподавании она слывет как теорема о двух милиционерах, а в англоязычных учебниках ей дают название теоремы о сэндвиче.

Доказательство. Дадим логические определения пределов, упомянутых в формулировке теоремы 3,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1\ \forall n > n_1\ \ |x_n - l| < \varepsilon$$

и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2\ \forall n > n_2\ \ |z_n - l| < \varepsilon.$$

Желая выполнения обоих неравенств, обозначим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и будем рассматривать $n > n_0$. Теперь из этих двух неравенств и соотношения $x_n \le y_n \le z_n$ выводим цепочку неравенств

$$-\varepsilon < x_n - l \le y_n - l \le z_n - l < \varepsilon.$$

Выделяя среднее звено и два крайних, сформулируем результирующее предложение

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |y_n - l| < \varepsilon,$$

которое означает, что $\lim_{n\to\infty} y_n = l$ и доказывает теорему 3.

Аналогично предыдущим теоремам заметим, что условие теоремы 3 допускает ослабление в выполнении неравенств $x_n \le y_n \le z_n$, которым достаточно быть справедливыми не для всех натуральных n, а начиная с некоторого номера n_0.

Лекция 6

1. Подпоследовательность сходящейся последовательности

Сначала покажем, что все подпоследовательности сходящейся последовательности ведут себя похожим образом.

Теорема 1. *Если последовательность сходится к пределу l, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу l.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n - l| < \varepsilon.$$

Рассмотрим подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$. Номера n_k неограниченно возрастают при $k\to\infty$, поэтому найдется номер k_0 такой, что $n_k > n_0$ при $k > k_0$. Соединяя вместе все сказанное, получаем логическое предложение

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ \ |x_{n_k} - l| < \varepsilon,$$

которое служит определением того, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l$, и доказывает теорему 1.

2. Частичные пределы последовательности

Рассмотрим последовательность

(1) $$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots\ .$$

Эта последовательность расходится. Не вдаваясь в подробное обсуждение, пообещаем вскоре получить критерий Коши, мгновенно подтверждающий расходимость последовательности (1). Тем не менее последовательность (1) имеет сходящиеся подпоследовательности

$$1, 1, ..., 1, ... \quad \text{и} \quad 0, 0, ..., 0, ... \ .$$

Первая из подпоследовательностей сходится к 1, вторая - к 0.

Пример (1) показывает, что расходящиеся последовательности могут иметь подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам, которым дадим название частичных пределов.

Определение 1. *Число l называется частичным пределом последовательности* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, *если существует ее подпоследовательность, сходящаяся к* l.

Множество X частичных пределов последовательности (1) состоит из двух элементов: 1 и 0. Нетрудно придумать иные примеры последовательностей с любым конечным и даже с бесконечным множеством частичных пределов.

Если множество X частичных пределов последовательности ограничено, то X имеет верхнюю и нижнюю грани, которым дадим специальные названия.

Определение 2. *Наибольший из частичных пределов последовательности* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *называется верхним пределом данной последовательности и обозначается* $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ *или* $\limsup x_n$. *Наименьший из частичных пределов последовательности* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *называется нижним пределом данной последовательности и обозначается* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ *или* $\liminf x_n$.

3. Существование верхнего предела ограниченной последовательности

Докажем теорему существования верхнего предела ограниченной последовательности.

Теорема 2. *Всякая ограниченная последовательность имеет верхний предел.*

Доказательство. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ограничена. Множество ее элементов и любое его подмножество имеет верхнюю грань. Обозначим

$$\alpha_1 = \sup_{n \geq 1} x_n = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},$$

$$\alpha_2 = \sup_{n \geq 2} x_n = \sup\{x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\},$$

....

$$\alpha_k = \sup_{n \geq k} x_n = \sup\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, \ldots\},$$

....

Поскольку верхняя грань множества не меньше верхней грани его подмножества, между величинами α_k возникают неравенства

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k \geq \ldots \ .$$

Кроме того, $\alpha_k \geq \inf_{n \geq 1} x_n$ для любого натурального k. Значит, невозрастающая последовательность α_1, α_2, ..., α_k, ... ограничена снизу и поэтому сходится. Обозначим

$$\alpha = \lim_{k \to \infty} \alpha_k = \inf_{k \geq 1} \alpha_k .$$

Покажем, что $\alpha = \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n$. Для этого убедимся, во-первых, что α является частичным пределом последовательности x_1, x_2, ..., x_n, ..., а во-вторых, что любой другой частичный предел этой последовательности не превосходит α.

Начнем с построения подпоследовательности, сходящейся к α. Сначала выпишем свойства чисел α_k, $k \in \mathbb{N}$, как верхних граней соответствующих множеств.

1. $\forall n \geq k \;\; x_n \leq \alpha_k$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_k \geq k \;\; x_{n_k} > \alpha_k - \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = 1/k$, соединим свойства 1-2 и получим

$$\forall k \geq 1 \; \exists n_k \geq k \;\; \alpha_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq \alpha_k .$$

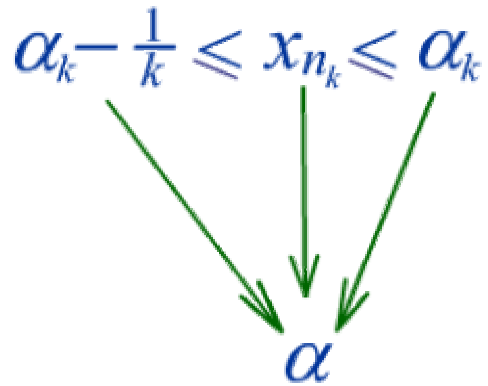


Рис. 1. Сходимость подпоследовательности x_{n_k} к α.

По теореме 3 лекции 5 заключаем, что последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

сходится к α. Поскольку нет гарантии, что номера n_k возрастают, то из последней последовательности выделим подпоследовательность с возрастающими номерами ее элементов. Тогда эта подпоследовательность является в то же время подпоследовательностью исходной последовательности x_1, x_2, ..., x_n, ... и сходится к α. Таким образом, мы доказали, что α оказывается частичным пределом исходной последовательности.

Теперь убедимся, что любой другой частичный предел исходной последовательности не превосходит α. Действительно, пусть β - частичный предел. Значит, из исходной последовательности можно выделить подпоследовательность

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \beta.$$

Очевидно,

$$\forall k \geq 1\; x_{m_k} \leq \sup\left\{x_{m_k}, x_{m_k+1}, \ldots, x_n, \ldots\right\} = \alpha_{m_k} \;\; и \; \lim_{k\to\infty} \alpha_{m_k} = \alpha.$$

$$\begin{tikzcd} x_{m_k} \arrow[d] & \leqslant & \alpha_{m_k} \arrow[d] \\ \beta & \leqslant & \alpha \end{tikzcd}$$

Рис. 2. Переход к пределу в неравенстве $x_{m_k} \leq \alpha_{m_k}$.

Если в полученном неравенстве $x_{m_k} \leq \alpha_{m_k}$ перейти к пределу при $k\to\infty$, то выведем неравенство $\beta \leq \alpha$, из которого следует, что α является наибольшим из частичных пределов, или верхним пределом последовательности x_1, x_2, ..., x_n, ... и завершаем доказательство теоремы 2.

Разумеется, аналогичными средствами можно доказать теорему существования нижнего предела последовательности. Однако мы вновь воспользуемся соотношениями между гранями множеств X и $-X$.

Теорема 3. *Всякая ограниченная последовательность имеет нижний предел.*

Доказательство. Пусть последовательность x_1, x_2, ..., x_n, ... ограничена и имеет множество X своих частичных пределов. Тогда последовательность $-x_1$, $-x_2$, ..., $-x_n$, ... также ограничена и множество ее частичных пределов равно $-X$. По теореме 2 последняя последовательность имеет наибольший из частичных пределов, или верхний предел, который обозначим через α, $\alpha = \sup(-X)$. Так как $\sup(-X) = -\inf X$, то $-\alpha = \inf X$ является наименьшим из частичным пределом последовательности x_1, x_2, ..., x_n, ..., или ее нижним пределом. Теорема 3 доказана.

Вновь заметим, что доказательства теорем 2 и 3 богаче их формулировок. Действительно, конструктивные методы доказательных рассуждений привели к выражениям для верхнего и нижнего пределов в виде

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} x_n$$

и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} x_n$$

и соотношениями между ними

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n).$$

Если последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ неограничена сверху, то разумно положить, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

Аналогично, если последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ неограничена снизу, то разумно положить, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

4. Сходимость последовательности, имеющей равные верхний и нижний пределы

Покажем, что сходимость последовательности эквивалентна совпадению ее верхнего и нижнего пределов.

Теорема 4. *Ограниченная последовательность сходится тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы совпадают.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость утверждения. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ сходится к пределу l. По теореме 1 любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу l. Следовательно, все частичные пределы последовательности равны l, то есть множество X ее частичных пределов состоит только из числа l. Поэтому $\sup X = \inf X = l$, а это означает, что ее верхний и нижний пределы равны l.

Теперь докажем достаточность утверждения теоремы 4. Пусть для ограниченной последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ выполняется условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = l.$$

Из очевидных соотношений

$$\beta_k = \inf\{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, \dots\} \le x_k \le \sup\{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, \dots\} = \alpha_k,\ k \ge 1,$$

и равенства

$$\lim \beta_k = \lim \alpha_k = l$$

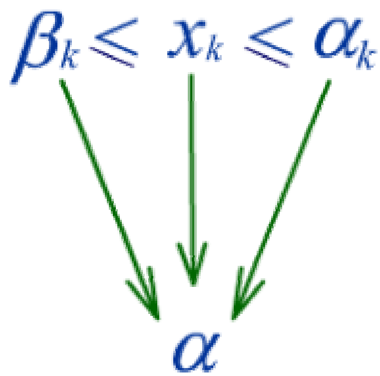


Рис. 3. Сходимость последовательности x_k .

по теореме 3 лекции 5 следует, что $\lim_{k\to\infty} x_k = l$. Это показывает, что утверждение достаточно и завершает доказательство теоремы 4.

Лекция 7

1. Фундаментальные последовательности

Из определения сходящейся последовательности следует, что ее элементы скапливаются в окрестности предела. Естественно, в этом случае элементы располагаются близко друг к другу. Дадим название последовательности, обладающей лишь последним свойством и покажем, что это свойство равносильно сходимости последовательности.

Определение 1. *Последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *называется фундаментальной, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0,\ m > n_0\ \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Обратим внимание, что квантор всеобщности $\forall\ \varepsilon > 0$ допускает простые обобщения определения 1. Именно, пусть $C > 0$ - фиксированное число. Если ε принимает все положительные значения, то $C\varepsilon$ также принимает всевозможные положительные значения. Поэтому определение 1 можно перефразировать в следующем виде: *последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *фундаментальна, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0,\ m > n_0\ \ |x_n - x_m| < C\varepsilon.$$

2. Критерий Коши сходимости последовательности

В определении 1 не упоминается существование предела, однако мы покажем сейчас, что определение 1 равносильно сходимости. Следующая теорема известна как критерий Коши для последовательностей.

Теорема 1. *Последовательность* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Утверждение теоремы 1 имеет характер необходимого и достаточного условия. Начнем с доказательства необходимости. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ сходится. Покажем, что она фундаментальна.

Обозначим $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ и запишем по определению

(1) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n - l| < \varepsilon.$$

Если выбрать еще один номер m, $m > n_0$, то для него также выполнится неравенство

(2) $$|x_m - l| < \varepsilon.$$

Теперь из неравенств (1) и (2) выводим

$$|x_n - x_m| = |x_n - l + l - x_m| \le |x_n - l| + |l - x_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

и запишем полученный результат как

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0,\ m > n_0\ \ |x_n - x_m| < 2\varepsilon,$$

что доказывает фундаментальность последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$.

Перейдем к доказательству достаточности условия. Предположим, что последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ фундаментальна и покажем, что она сходится. Предварительно убедимся, что эта последовательность ограничена. Действительно, воспользуемся определением 1, в котором выберем $m = n_0 + 1$. Неравенство определения 1 означает в этом случае, что все элементы x_n с номерами $n > n_0$ удовлетворяют неравенствам

$$x_{n_0+1} - \varepsilon < x_n < x_{n_0+1} + \varepsilon,$$

то есть последовательность $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ..., x_n, ...$ ограничена. Следовательно, множество

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ..., x_n\}$$

ограничено как объединение двух ограниченных множеств, из которых первое является конечным. Это доказывает ограниченность всей последовательности.

По теоремам 2 и 3 лекции 6 наша ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы. Обозначим

$$\beta = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \quad \alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

По свойствам верхнего и нижнего пределов запишем

1. $\forall n \ \ \beta \le x_n \le \alpha$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_{n_k}, x_{m_k}\ \ x_{n_k} < \beta + \varepsilon,\ x_{m_k} > \alpha - \varepsilon.$

Свойство фундаментальности запишем в виде

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ \left| x_{n_k} - x_{m_k} \right| < \varepsilon.$$

Соединим последнее неравенство со свойством 2 и получим

$$\alpha - \beta = \left(\alpha - x_{m_k}\right) + \left(x_{m_k} - x_{n_k}\right) + \left(x_{n_k} - \beta\right) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Полагая, например, $\varepsilon = (1/3)(1/(10^n))$, $n \in \mathbb{R}$, по лемме 1 лекции 3 заключаем, что $\alpha - \beta \le 0$. Но верхний предел последовательности не может быть меньше ее нижнего предела, поэтому $\alpha = \beta$. По теореме 4 лекции 6 выводим, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится и заканчиваем доказательство теоремы 1.

3. Взаимосвязь различных свойств последовательности

Соберем воедино полученные знания о взаимосвязи различных свойств последовательности.

1. По теореме 2 лекции 4 сходимость последовательности влечет ее ограниченность.

2. По теореме 3 лекции 4 монотонность и ограниченность последовательности вместе влекут ее сходимость.

3. По критерию Коши сходимость последовательности эквивалентна ее фундаментальности.

Отметим на схеме стрелками зависимости 1-3.

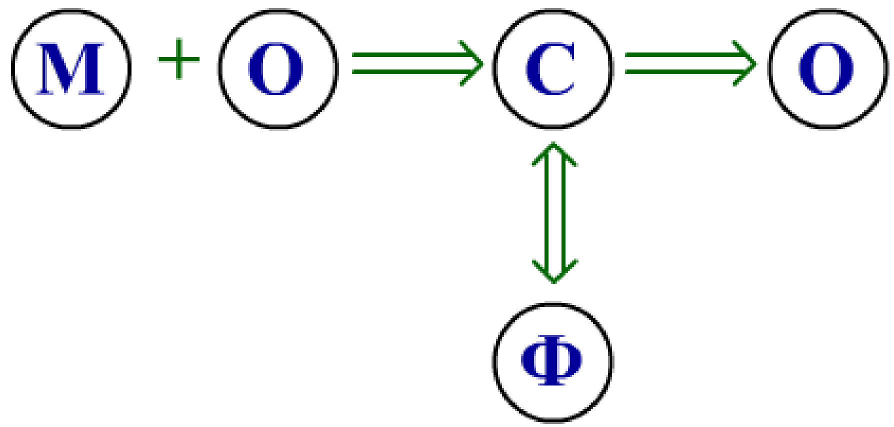


Рис. 1. Взаимосвязь различных свойств последовательности.

Однако в созданной схеме имеются и более слабые зависимости. Именно, благодаря теоремам 2 и 3 лекции 6 ограниченность последовательности влечет существование у нее верхнего и нижнего пределов. Напомним, что каждый из них является частичным пределом. Выразим это следствие теорем 2 и 3 лекции 6 в следующей классической теореме, известной как теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 2. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Естественно, теорема 2 не нуждается в отдельном доказательстве.

Внесем пунктирной стрелкой в схему зависимостей результат теоремы Больцано-Вейерштрасса.

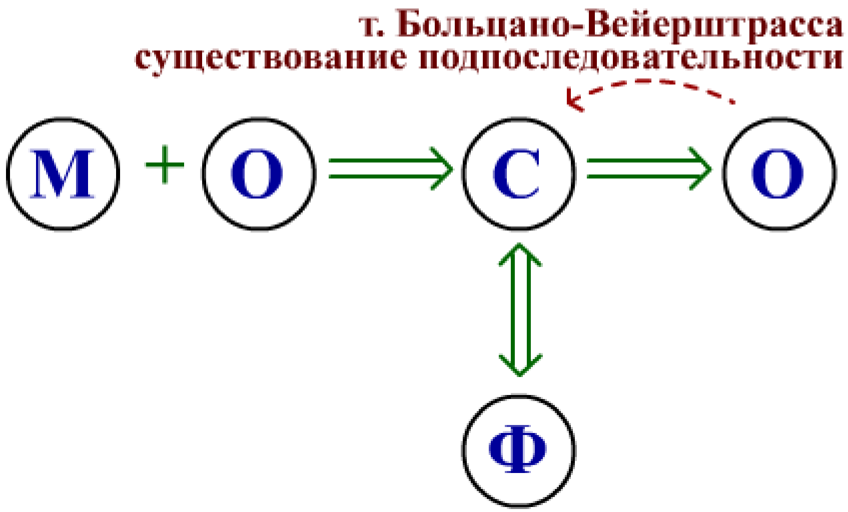


Рис. 2. Взаимосвязь свойств последовательности, устанавливаемая теоремой Больцано-Вейерштрасса.

4. Ряд как иная форма последовательности

Помимо простого перечисления элементов последовательности, рассмотрим процесс, в котором элементы поочередно складываются. В лекции 1 упоминался подобный пример из программы средней школы - это сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Определение 2. *Пусть дана числовая последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. *Обозначим* $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots,$ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ldots$. *Последовательность* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *называется числовым рядом и обозначается* $\sum a_n$. *Числа* $a_1,$ $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *называются членами ряда, а числа* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *называются частными суммами ряда.*

Определение 3. *Числовой ряд* $\sum a_n$ *называется сходящимся, если последовательность* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *его частных сумм сходится. В этом случае предел*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется суммой ряда и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

В противном случае ряд называется расходящимся.

Напомним, что ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию с начальным элементом b и знаменателем q, $|q| < 1$, сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = \frac{b}{1-q}.$$

Ряд $\sum bq^{n-1}$, $|q| < 1$, будем называть *геометрическим рядом*.

5. Перенос фактов теории последовательностей в теорию рядов

Переформулируем в терминах теории рядов теорему 3 лекции 4 о сходимости монотонной ограниченной последовательности и критерий Коши для последовательностей.

Начнем с критерия Коши, согласно которому последовательность частных сумм S_1, S_2, ..., S_n, ... числового ряда $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда эта последовательность фундаментальна. Другими словами, ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0, m > n_0 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $m > n$, то есть $m = n + p$ для некоторого натурального числа p. При таком соглашении проделаем простые преобразования

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n+p} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Запишем преобразованное таким образом условие (3) и переформулируем критерий Коши для последовательностей как критерий Коши для рядов.

Теорема 3. *Числовой ряд* $\sum a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall p \geq 1 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Заметим, как и прежде, что число ε в неравенстве условия (3) можно заменить на $C\varepsilon$ с некоторым $C > 0$.

Теорема 3 выражает необходимое и достаточное условие сходимости ряда. Если условие (3) ослабить, то оно сохранится как необходимое, но не обязательно останется достаточным условием сходимости ряда. Осуществим такое ослабление, потребовав, чтобы неравенство в (3) выполнялось не для всех $p \geq 1$, а лишь для одного значения $p = 1$. В этом случае условие (3) приобретет вид

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |a_{n+1}| < \varepsilon,$$

и выражает по существу, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Итак, мы готовы сформулировать необходимое условие сходимости ряда в следующей теореме.

Теорема 4. *Если числовой ряд* $\sum a_n$ *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Перейдем к интерпретации в теории рядов теоремы о сходимости монотонной ограниченной последовательности, которую иначе можно сформулировать так: *монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена*.

Предположим, что все члены ряда $\sum a_n$ не отрицательны: $a_n \geq 0$, $n \geq 1$. Сравним частные суммы S_n и S_{n+1} этого ряда

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} \geq 0.$$

Отсюда следует, что $S_n \le S_{n+1}$ для всех натуральных n. Значит, последовательность частных сумм монотонна, и мы готовы переформулировать критерий сходимости монотонной последовательности как соответствующий критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.

Теорема 5. *Предположим, что $a_n \ge 0$ для всех натуральных n. Числовой ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ его частных сумм ограничена.*

Лекция 8

1. Признак мажорации сходимости числового ряда

Геометрический ряд устроен относительно просто и играет заметную роль в теории рядов. Удача состоит и в том, что удается вычислить сумму геометрического ряда. Подобная возможность предоставляется относительно редко. Основная проблематика в теории рядов заключается не в нахождении суммы ряда, а в установлении его сходимости или расходимости.

Некоторые признаки основаны на сравнении данного ряда с каким-либо тестовым рядом, о котором определенно известно, сходится он или нет. Простейшим из алгоритмов сравнения является признак мажорации, выраженный в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть для всех натуральных n выполняются неравенства*

$$|a_n| \le Cb_n, \qquad C > 0.$$

Тогда из сходимости числового ряда $\sum b_n$ следует сходимость числового ряда $\sum |a_n|$.

Доказательство. Согласно критерию Коши сходимость ряда $\sum b_n$ эквивалентна условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall p \ge 1 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \varepsilon.$$

Знак модуля в последнем неравенстве можно опустить, потому что, как следует из условия теоремы 1, $b_n \ge 0$, $n \ge 1$.

Поскольку

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} Cb_k,$$

приходим к условию

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; \forall p \ge 1 \; \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < C\varepsilon,$$

что равносильно сходимости ряда $\sum|a_n|$ и доказывает теорему 1.

Обратим внимание, что неравенство $|a_n| \le Cb_n$ теоремы 1 применялось не для всех n, а начиная с номера n_0. Поэтому условие теоремы 1 допускает ослабление. Именно, достаточно потребовать, чтобы неравенства $|a_n| \le Cb_n$ выполнялись для всех $n > n_0$, где n_0 - некоторое натуральное число.

2. Признак сравнения сходимости числового ряда

Другой признак, где используется знание о некоем тестовом ряде, известен под названием признака сравнения. Сформулируем его в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $b_n \ne 0$, $n \ge 1$, и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = l, \quad l \ge 0.$$

Если $l > 0$, то числовые ряды $\sum|a_n|$ и $\sum|b_n|$ сходятся или расходятся одновременно. Если $l = 0$, то из сходимости ряда $\sum|b_n|$ следует сходимость ряда $\sum|a_n|$.

Доказательство. Последовательность

$$\frac{|a_1|}{|b_1|}, \frac{|a_2|}{|b_2|}, \dots, \frac{|a_n|}{|b_n|}, \dots$$

сходится, поэтому она ограничена:

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} \le C, \quad n \ge 1,$$

для некоторого $C > 0$. Отсюда вытекает неравенство $|a_n| \le C|b_n|$, которое по признаку мажорации устанавливает сходимость числового ряда $\sum|a_n|$, если сходится ряд $\sum|b_n|$. Это доказывает вторую часть теоремы при $l = 0$ и одностороннюю зависимость между сходимостью двух рядов при $l > 0$.

Пусть $l > 0$. Докажем обратную зависимость между сходимостью рядов. Числа a_n могут обращаться в нуль лишь для конечного набора номеров, иначе нашлась бы подпоследовательность

$$\frac{|a_{n_1}|}{|b_{n_1}|}, \frac{|a_{n_2}|}{|b_{n_2}|}, \dots, \frac{|a_{n_k}|}{|b_{n_k}|}, \dots,$$

сходящаяся к нулю, а это противоречит предположению $l > 0$. Поэтому существует n_0 такое, что $a_n \ne 0$ для $n > n_0$. Теперь заключаем, что отношение

$$\frac{|a_n|}{|b_n|}$$

определено для всех $n > n_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = \frac{1}{l},$$

и поэтому ограничено:

$$\frac{|b_n|}{|a_n|} \le C', \quad n > n_0,$$

с некоторым $C' > 0$. Вновь по признаку мажорации неравенство $|b_n| \le C'|a_n|$, $n > n_0$, устанавливает сходимость числового ряда $\sum|b_n|$, если сходится ряд $\sum|a_n|$, и заканчивает доказательство теоремы 2.

Если принять, что предел в теореме 2 бесконечен,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = \infty, \tag{1}$$

то меняя ролями a_n и b_n, сводим исследование к случаю $l = 0$. Таким образом, добавим к теореме 2 утверждение: *если выполняется условие* (1), *то сходимость числового ряда* $\sum|a_n|$ *влечет сходимость ряда* $\sum|b_n|$.

3. Признак Коши сходимости числового ряда

Признаки мажорации и сравнения предполагают знание о поведении одного из двух обсуждаемых рядов. Таким тестовым рядом часто выступает геометрический ряд. Есть несколько популярных признаков, в которых сравнение с геометрическим рядом проявляется в более глубокой форме, скрытой в доказательстве, и не выражено явно в их формулировках. Один из весьма распространенных признаков этого типа связывают с именем Коши. Он дается в следующей теореме.

Теорема 3. *Предположим, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = l\,.$$

Если $l < 1$, *то числовой ряд* $\sum|a_n|$ *сходится. Если* $l > 1$, *то ряд* $\sum|a_n|$ *расходится.*

Доказательство. Пусть сначала $l < 1$. Положим

$$\alpha_k = \sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}, \sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}\right\}.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty}\alpha_k = l$$

и мы можем записать по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ \ |\alpha_k - l| < \varepsilon.$$

Неравенство $|\alpha_k - l| < \varepsilon$ равносильно системе двух неравенств

$$-\varepsilon < \alpha_k - l < \varepsilon$$

или

$$l - \varepsilon < \alpha_k < l + \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[k]{|a_k|} < l + \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что $l + \varepsilon < 1$. Тогда из неравенства

$$|a_k| < (l + \varepsilon)^k, \qquad k > k_0,$$

и сходимости геометрического ряда $\sum(l + \varepsilon)^n$ по признаку мажорации выводим утверждение о сходимости числового ряда $\sum|a_n|$.

Пусть теперь $l > 1$. Верхний предел - это частичный предел. Значит, существует подпоследовательность

$$\sqrt[n_1]{|a_{n_1}|}, \sqrt[n_2]{|a_{n_2}|}, \ldots, \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}, \ldots,$$

для которой

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = l.$$

Для этой подпоследовательности запишем по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ \left|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} - l\right| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно системе двух неравенств

$$l - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < l + \varepsilon,$$

из которых, в частности, следует, что

$$\left|a_{n_k}\right| > (l-\varepsilon)^{n_k}, \quad k > k_0.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что $l - \varepsilon > 1$. Тогда

$$\left|a_{n_k}\right| > 1, \quad k > k_0,$$

что нарушает необходимое условие $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ сходимости ряда. Следовательно, числовой ряд $\sum|a_n|$ расходится, что заканчивает доказательство теоремы 3.

Случай $l = 1$ не попал в перечень возможностей, рассмотренных в теореме 3, и не имеет гарантированного ответа.

Во второй части теоремы 3 делается вывод о расходимости ряда $\sum|a_n|$, но доказательство в равной степени устанавливает и расходимость ряда $\sum a_n$.

Заметим, что утверждение теоремы 3 охватывает и случай $l = \infty$, в котором ряд $\sum|a_n|$ расходится.

4. Признак Даламбера сходимости числового ряда

Наряду с признаком Коши на практике очень удобен следующий признак Даламбера.

Теорема 4. *Предположим, что* $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, *и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l.$$

Если $l < 1$, *то числовой ряд* $\sum|a_n|$ *сходится. Если* $l > 1$, *то ряд* $\sum|a_n|$ *расходится.*

Доказательство. Пусть сначала $l < 1$. Запишем по определению

(2) $$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - l\right| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно системе двух неравенств

(3) $$l-\varepsilon<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l+\varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon>0$ таким, что $l+\varepsilon<1$, и выпишем p последовательных неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|}<l+\varepsilon \\ \dfrac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|}<l+\varepsilon \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{|a_{n_0+p+1}|}{|a_{n_0+p}|}<l+\varepsilon. \end{cases}$$

Перемножив все неравенства, после многочисленных сокращений получим

$$\frac{|a_{n_0+p+1}|}{|a_{n_0+1}|}<(l+\varepsilon)^p$$

или

$$|a_{n_0+p+1}|<|a_{n_0+1}|(l+\varepsilon)^p.$$

Сходимость геометрического ряда $\sum|a_{n_0+1}|(l+\varepsilon)^p$ по признаку мажорации влечет сходимость числового ряда $\sum|a_{n_0+p+1}|$. Заметим, что ряды

$$\sum|a_n| \quad \text{и} \quad \sum|a_{n_0+p+1}|$$

сходятся одновременно, так как их частные суммы отличаются на постоянное число

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} |a_k|.$$

Таким образом, мы установили сходимость ряда $\sum|a_n|$.

Пусть теперь $l > 1$. Снова воспользуемся определением (2) с эквивалентной системой неравенств (3), выберем $\varepsilon > 0$ так, что $l-\varepsilon > 1$, и выпишем p последовательных неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} > l-\varepsilon \\ \dfrac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} > l-\varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{|a_{n_0+p+1}|}{|a_{n_0+p}|} > l-\varepsilon. \end{cases}$$

Перемножив все неравенства, после многочисленных сокращений получим

$$\frac{|a_{n_0+p+1}|}{|a_{n_0+1}|} > (l-\varepsilon)^p$$

или

$$|a_{n_0+p+1}| > |a_{n_0+1}|(l-\varepsilon)^p > |a_{n_0+1}|.$$

Это нарушает необходимое условие $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ сходимости ряда. Следовательно, числовой ряд $\sum|a_n|$ расходится, что заканчивает доказательство теоремы 4.

Случай $l = 1$ не попал в перечень возможностей, рассмотренных в теореме 4, и не имеет гарантированного ответа.

Во второй части теоремы 4 делается вывод о расходимости ряда $\sum|a_n|$, но доказательство в равной степени устанавливает и расходимость ряда $\sum a_n$.

Утверждение теоремы 4 охватывает и случай $l = \infty$, в котором ряд $\sum|a_n|$ расходится.

5. Признак Коши для рядов с убывающими слагаемыми

Продолжим перечень употребительных признаков сходимости числовых рядов признаком Коши для рядов с убывающими слагаемыми, который будет позднее усилен интегральным признаком Коши, но на первоначальном этапе изучения рядов позволит исследовать несколько принципиально важных примеров.

Теорема 5. *Пусть* $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots \ge 0$. *Тогда ряды*

$$\sum a_n \quad и \quad \sum 2^n a_{2^n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из условий теоремы 5 вытекает, что для $k = 2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n-1$ справедливы неравенства

$$a_{2^n} \le a_k \le a_{2^{n-1}}.$$

Суммируя эти 2^{n-1} неравенств по всем $k = 2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n-1$, находим

$$2^{n-1} a_{2^n} \le \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_k \le 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Суммируем последние неравенства по $n = 1, 2, \ldots, m$ и получим

(4) $$\sum_{n=1}^{m} 2^{n-1} a_{2^n} \le \sum_{n=1}^{2^m-1} a_n \le \sum_{n=1}^{m} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Пусть

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} a_n$$

- частная сумма ряда $\sum a_n$, а

$$\sigma_p = \sum_{n=1}^{p} 2^n a_{2^n}$$

- частная сумм ряда $\sum 2^n a_{2^n}$. Тогда неравенства (4) интерпретируются как

(5) $$\frac{1}{2}\sigma_m \le S_{2^m-1} \le a_1 + \sigma_{m-1}.$$

Первое неравенство в (5) означает, что если частные суммы S_n ограничены, то и частные суммы σ_n ограничены, и по теореме 5 лекции 7 из сходимости ряда $\sum a_n$ следует сходимость ряда $\sum 2^n a_{2^n}$.

Второе неравенство в (5) означает, что если частные суммы σ_n ограничены, то и частные суммы S_{2^n-1} ограничены. Но частные суммы S_n образуют неубывающую последовательность. Значит, для любого натурального p найдется число n такое, что $p \le 2^n-1$ и поэтому

$$S_p \le S_{2^n-1}.$$

Следовательно, все частные суммы S_p ограничены, и по теореме 5 лекции 7 из сходимости ряда $\sum 2^n a_{2^n}$ следует сходимость ряда $\sum a_n$, что доказывает теорему 5.

Пример. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

и применим теорему 5 для исследования его сходимости. Согласно этой теореме наш ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum 2^n \frac{1}{2^n} = \sum 1 = 1+1+1+\ldots+1+\ldots,$$

который, очевидно, расходится. Следовательно, ряд $\sum(1/n)$ расходится.

Ряд $\sum(1/n)$ называется *гармоническим рядом*. Наше исследование показало, что гармонический ряд расходится.

Лекция 9

1. Абсолютная и условная сходимость числового ряда

Все признаки сходимости лекции 8 относились к числовым рядам $\sum|a_n|$. Этот феномен не случаен, дадим ему отдельное название.

Определение 1. *Числовой ряд $\sum a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum|a_n|$.*

В определении 1 ничего не говорится о сходимости самого ряда $\sum a_n$. Тем не менее сходимость нашего ряда подразумевается, потому что абсолютная сходимость влечет сходимость ряда, в чем мы сейчас убедимся. Сначала введем понятие положительной и отрицательной части числа.

Определение 2. *Пусть $a \in \mathbb{R}$. Число*

$$a^+ = \frac{|a|+a}{2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0 \\ 0, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

называется положительной частью числа a, а число

$$a^- = \frac{|a|-a}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } a \ge 0 \\ -a, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

называется отрицательной частью числа a.

Очевидны соотношения между a, $|a|$, a^+ и a^-:

$$a = a^+ - a^-, \qquad |a| = a^+ + a^-.$$

Теорема 1. *Если числовой ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, то он сходится.Этот ряд абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$.*

Доказательство. По существу в теореме 1 высказаны два утверждения. Начнем со второго из них, которое имеет характер необходимого и достаточного условия абсолютной сходимости ряда.

Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится. Значит, сходится ряд $\sum |a_n|$. Из неравенств

$$0 \le a_n^+ \le |a_n| \quad \text{и} \quad 0 \le a_n^- \le |a_n|$$

по признаку мажорации следует сходимость рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$, что доказывает необходимость условия во второй части теоремы 1. Попутно отметим, что

$$\text{(1)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^- \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

и поэтому

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Обратно, пусть ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ сходятся. Тогда справедливы соотношения (1) между частными суммами рассматриваемых рядов, из которых следует сходимость рядов $\sum |a_n|$ и $\sum a_n$ и справедливость формул (2). Это доказывает достаточность условия во второй части теоремы 1.

Одновременно, принимая во внимание абсолютную сходимость нашего ряда, мы доказали первое утверждение и завершили доказательство теоремы 1.

Дадим название сходимости, альтернативной абсолютной сходимости.

Определение 2. *Числовой ряд $\sum a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.*

Теорема 1 имеет свою собственную альтернативу, исходящую из первой формулы в (1). Если сумма двух последовательностей сходится, то либо обе складываемые последовательности сходятся, либо обе они расходятся. Это приводит нас к утверждению: *если ряд* $\sum a_n$ *условно сходится, то оба ряда* $\sum a_n^+$ *и* $\sum a_n^-$ *расходятся.*

2. Преобразование Абеля

В признаках сходимости рядов полезна следующая формула, называемая преобразованием Абеля.

Лемма 1. *Пусть* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \geq 1$. *Тогда для всех* $n \geq 1$ *справедлива формула*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{k+1} - a_k\right) B_k.$$

Доказательство. Принимая во внимание очевидные формулы

$$b_1 = B_1, \quad b_2 = B_2 - B_1, \ldots, b_n = B_n - B_{n-1},$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 B_1 + a_2 \left(B_2 - B_1\right) + \ldots + a_n \left(B_n - B_{n-1}\right) =$$

$$B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \ldots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} B_k \left(a_k - a_{k+1}\right) + B_n a_n,$$

что эквивалентно формуле в лемме 1 и заканчивает ее доказательство.

3. Признак Дирихле сходимости числового ряда

Пользуясь преобразованием Абеля, выведем признаки сходимости числовых рядов, которые способны установить как абсолютную, так и условную сходимость. Следующий признак принадлежит Дирихле.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

1. *последовательность частных сумм* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *ограничена*;

2. *последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *монотонна и* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда числовой ряд $\sum a_n b_n$ *сходится*

Доказательство. Последовательность чисел $a_n B_n$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно мала как произведение бесконечно малых a_n и ограниченных B_n. Преобразование Абеля гарантирует в таком случае одновременную сходимость или расходимость рядов $\sum a_n b_n$ и $\sum (a_{n+1} - a_n) B_n$. Применим критерий Коши к исследованию сходимости второго из этих рядов.

Пусть $|B_k| \le M$, $k \ge 1$. Кроме того, запишем определение сходимости a_n к 0

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |a_n| < \varepsilon.$$

Теперь при $n > n_0$ найдем оценку

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) B_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{k+1} - a_k| |B_k| \le M \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{k+1} - a_k|.$$

Так как последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ монотонна, то числа $a_{k+1} - a_k$, $k \ge 1$, не меняют знака с изменением k и поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{k+1} - a_k| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k)\right| =$$

$$|a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+3} - a_{n+2} + \ldots + a_{n+p+1} - a_{n+p}| = |a_{n+p+1} - a_{n+1}| \le$$

$$|a_{n+p+1}| + |a_{n+1}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$$\left|\cancel{a_{n+2}} - a_{n+1} + \cancel{a_{n+3}} - \cancel{a_{n+2}} + \cancel{\ldots} + a_{n+p+1} - \cancel{a_{n+p}}\right| = \\ = \left|a_{n+p+1} - a_{n+1}\right|$$

Рис. 1. Иллюстрация к признаку Абеля сходимости числового ряда.

Соединяя все оценки вместе, убеждаемся, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall p \ge 1 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_{k+1} - a_k) B_k \right| < 2M\varepsilon,$$

что эквивалентно по критерию Коши сходимости ряда $\sum(a_{n+1} - a_n)B_n$, а значит, и ряда $\sum a_n b_n$. Теорема 2 доказана.

4. Признак Абеля сходимости числового ряда

В следующей теореме сформулируем признак Абеля, родственный признаку Дирихле и по математическому смыслу, и по способу доказательства.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

1. *числовой ряд* $\sum b_n$ *сходится*;

2. *последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *монотонна и ограничена*.

Тогда числовой ряд $\sum a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Пусть $|a_k| \le M$, $k \ge 1$. Кроме того, запишем критерий Коши сходимости ряда $\sum b_n$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall p \ge 1 \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon.$$

Обозначим $B_p^n = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$. В этих обозначениях последнее неравенство примет вид

$$\left|B_p^n\right| < \varepsilon, \quad n > n_0, \quad p \ge 1.$$

Применим преобразование Абеля к сумме $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$ и получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p} B_p^n - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k^n.$$

Теперь при $n > n_0$ найдем оценку

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|a_{n+p} B_p^n - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k^n\right| \le$$

$$\left|a_{n+p}\right|\left|B_p^n\right| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left|a_{k+1} - a_k\right|\left|B_k^n\right| < M\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left|a_{k+1} - a_k\right|.$$

Так как последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ монотонна, то числа $a_{k+1} - a_k$, $k \ge 1$, не меняют знака с изменением k и поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left|a_{k+1} - a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k)\right| =$$

$$|a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+3} - a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} - a_{n+p-1}| = |a_{n+p} - a_{n+1}| \le$$

$$|a_{n+p}| + |a_{n+1}| \le M + M = 2M.$$

Соединяя все оценки вместе, убеждаемся, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall p \ge 1 \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < M\varepsilon + \varepsilon 2M = 3M\varepsilon,$$

что эквивалентно по критерию Коши сходимости ряда $\sum a_n b_n$. Теорема 3 доказана.

Сопоставляя два приведенных признака, замечаем, что первое условие в признаке Абеля несколько усиливает соответствующее условие признака Дирихле, зато второе условие признака Абеля в той же степени ослаблено по сравнению с аналогичным условием признака Дирихле.

Условия в признаке Дирихле	**Условия в признаке Абеля**
1. *последовательность частных сумм* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *ограничена*;	1. *числовой ряд* $\sum b_n$ *сходится*;
2. *последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *монотонна и* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.	2. *последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *монотонна и ограничена*.

5. Признак Лейбница сходимости числового ряда

Следующая теорема, известная как признак Лейбница сходимости числовых рядов, является простым частным случаем признака Дирихле и успешно решает много классических задач теории рядов.

Теорема 4. *Пусть* $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots \ge 0$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Тогда ряд*

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

сходится.

Доказательство. Обозначим $b_n = (-1)^{n-1}$, $n \ge 1$. Тогда

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четно} \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Следовательно, последовательность чисел B_n ограничена. Таким образом, последовательность чисел a_n и b_n удовлетворяет условиям 1 и 2 признака Дирихле и поэтому ряд

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = \sum a_n b_n$$

сходится. Теорема 4 доказана.

Пример. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots .$$

Так как числа $1/n$ монотонно стремятся к 0, то наш ряд сходится по признаку Лейбница. С другой стороны, ряд

$$\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$

представляет собой гармонический ряд, который расходится.

Следовательно, ряд в рассмотренном примере сходится, но не сходится абсолютно. Таким образом, мы построили простой пример условно сходящегося ряда, что увеличивает интерес к теории условно сходящихся рядов, которая оказывается невырожденной и весьма содержательной.

Лекция 10

1. Сочетательное свойство сходящегося числового ряда

Напомним, что операция сложения действительных чисел ассоциативна и коммутативна. Изучим распространение этих свойств на суммы бесконечного числа слагаемых. Ассоциативность в случае рядов предусматривает произвольное расставление скобок

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_{n_1}\right)+\left(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\ldots+a_{n_2}\right)+\ldots+\left(a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\ldots+a_{n_k}\right)+\ldots.$$

Следующая теорема устанавливает такую возможность, которая называется сочетательным свойством сходящегося ряда.

Теорема 1. *Если числовой ряд* $\sum a_n$ *сходится, то ряд*

$$\sum\left(a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\ldots+a_{n_k}\right) \tag{1}$$

сходится к той же сумме.

Доказательство. Сходимость ряда $\sum a_n$ к сумме S означает, что последовательность S_1, S_2, ..., S_n... его частных сумм имеет S своим пределом. Последовательность частных сумм ряда (1) имеет вид

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}, \ldots.$$

то есть является подпоследовательностью последовательности S_1, S_2, ..., S_n, ... Но подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу. Поэтому ряд (1) сходится к сумме S, что доказывает теорему 1.

2. Переместительное свойство абсолютно сходящегося числового ряда

Коммутативность операции сложения в применении к рядам предусматривает произвольную перестановку слагаемых в бесконечной сумме и рассмотрение ряда

$$\sum a_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} + \ldots, \tag{2}$$

где n_1, n_2, ..., n_k, ... - последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз. Такое действие осуществимо не для всякого сходящегося ряда, а лишь для абсолютно сходящегося. Следующая теорема выражает переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда.

Теорема 2. *Если числовой ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum a_{n_k}$ сходится к той же сумме.*

Доказательство. Пусть сначала $a_n \geq 0$ для всех $n \geq 1$ и ряд $\sum a_n$ сходится к S. Тогда последовательность его частных сумм S_n не убывает и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\geq 1} S_n = S.$$

Обозначим через $\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} a_{n_k}$ частную сумму ряда (2) и

$$N = \max\left\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_m}\right\}.$$

При этих обозначениях справедливо неравенство

$$\sigma_m \leq S_N \leq S,$$

поскольку частная сумма S_N содержит все слагаемые, вошедшие в частную сумму σ_m. Следовательно, монотонная последовательность частных сумм σ_m ограничена и поэтому ряд (2) сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = S' = \lim_{m\to\infty} \sigma_m = \sup_{m\geq 1} \sigma_m \leq S.$$

Таким образом, для суммы S' ряда (2) и суммы S исходного ряда справедливо соотношение

$$S' \le S.$$

Если рассматривать исходный ряд $\sum a_n$ как результат обратной перестановки слагаемых в ряде (2), возвращающей его к исходному ряду, то справедливо аналогичное соотношение между суммой одного ряда и другого, возникшего после перестановки членов,

$$S \le S'.$$

Два последних соотношения устанавливают равенство

$$S = S'$$

и доказывают теорему для рядов с неотрицательными слагаемыми.

Пусть теперь числа a_n - произвольного знака и ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится к сумме S. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = S.$$

По доказанному, ряды

$$\sum a_{n_k}^+ \quad u \quad \sum a_{n_k}^-$$

сходятся, а вместе с ними сходится и ряд (2) и справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

которые доказывают теорему 2.

3. Теорема Римана

Переместительное свойство не выполняется для условно сходящихся рядов. В подтверждение несложно привести какой-либо контрпример. Однако мы докажем гораздо более удивительное качество условно сходящихся рядов, выраженное в следующей теореме, принадлежащей Риману.

Теорема 3. *Если числовой ряд $\sum a_n$ условно сходится, то для любого $A \in \mathbb{R}$ найдется такая перестановка слагаемых, что ряд $\sum a_{nk}$ сходится к сумме A. Кроме того, найдется такая перестановка слагаемых, что ряд $\sum a_{nk}$ расходится.*

Доказательство. Условная сходимость ряда $\sum a_n$ влечет расходимость рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$, которая, в свою очередь, означает, что

$$\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} a_k^+ = +\infty, \quad и \quad \sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} a_k^- = +\infty.$$

Кроме того, выполняется необходимое условие сходимости ряда $\sum a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Докажем сначала первое утверждение теоремы 3. Выберем произвольно $A \in \mathbb{R}$. Доказательство симметрично для $A \geq 0$ и $A \leq 0$, поэтому проведем одно из них, например, для $A \geq 0$. Существует минимальное натуральное число n_1, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ = a_1^+ + a_2^+ + \ldots + a_{n_1}^+ > A.$$

После этого суммирования положительных членов ряда начинаем добавлять отрицательные члены ряда. Существует минимальное натуральное число n_2, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- < A.$$

Следующим действием вновь добавляем положительные члены ряда. Существует минимальное натуральное число n_3, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} a_k^+ > A.$$

Снова добавляем отрицательные члены ряда. Существует минимальное натуральное число n_4, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} a_k^+ - \sum_{k=n_2+1}^{n_4} a_k^- < A.$$

И так далее. На произвольном нечетном m-м шаге, существует минимальное натуральное число n_m, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m-1}} a_k^- > A.$$

На следующим за ним шаге существует минимальное натуральное число n_{m+1}, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m+1}} a_k^- < A.$$

Процесс продолжим неограниченно.

Алгоритм действия составлен так, что каждое неотрицательное слагаемое исходного ряда в некоторый момент будет учтено в сумме $\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+$, а каждое неположительное слагаемое исходного ряда в некоторый момент будет учтено в сумме $\sum_{k=1}^{n_{m+1}} a_k^-$. итоге возникает новый ряд, отличающийся от первоначального перестановкой своих членов. На m-м и $(m+1)$-м шагах справедливы неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m-1}} a_k^- - A\right| < a_{n_m}^+, \quad \left|\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m+1}} a_k^- - A\right| < a_{n_{m+1}}^-.$$

Так как a_n стремятся к 0 при $n \to \infty$, то последние неравенства означают, что частные суммы нового ряда сходятся к A, что доказывает первое утверждение теоремы 3.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы 3, слегка изменив алгоритм. На первом шаге существует минимальное натуральное число n_1, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ = a_1^+ + a_2^+ + \ldots a_{n_1}^+ > 1.$$

После этого суммирования положительных членов ряда начинаем добавлять отрицательные члены ряда. Существует минимальное натуральное число n_2, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- < -1.$$

Следующим действием вновь добавляем положительные члены ряда. Существует минимальное натуральное число n_3, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} a_k^+ > 1.$$

Снова добавляем отрицательные члены ряда. Существует минимальное натуральное число n_4, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} a_k^+ - \sum_{k=n_2+1}^{n_4} a_k^- < -1.$$

И так далее. На произвольном нечетном m-м шаге, существует минимальное натуральное число n_m, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m-1}} a_k^- > 1.$$

На следующим за ним шаге существует минимальное натуральное число n_{m+1}, для которого

$$\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m+1}} a_k^- < -1.$$

Процесс продолжим неограниченно.

Алгоритм действия составлен так, что каждое неотрицательное слагаемое исходного ряда в некоторый момент будет учтено в сумме $\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+$, а каждое неположительное слагаемое исходного ряда в некоторый момент будет учтено в сумме $\sum_{k=1}^{n_{m+1}} a_k^-$. В итоге возникает новый ряд, отличающийся от первоначального перестановкой своих членов. На m-м и $(m+1)$-м шагах справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m-1}} a_k^- > 1, \quad \sum_{k=1}^{n_m} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_{m+1}} a_k^- < -1.$$

По критерию Коши последовательность частных сумм нового ряда расходится, что доказывает второе утверждение теоремы 3. Теорема 3 доказана.

4. Произведение числовых рядов

Мы многократно упоминали ряды $\sum(a_n + b_n)$, воспринимая их как сумму рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, и естественно принимали, что частные суммы первого ряда получены сложением частных сумм двух других рядов.

Можно пойти сходным путем в попытке умножения рядов. Именно, если A_n и B_n - частные суммы рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, $n \geq 1$, то частные суммы C_n ряда-произведения

$$\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$$

должны равняться произведению

$$C_n = \sum_{k=2}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k = A_n B_n.$$

Есть и другие возможности определения произведения двух рядов. Мы не станем сравнивать различные возможности и доказывать какие-либо теоремы о сходимости (абсолютной или условной) ряда-произведения при условии сходимости рядов-сомножителей, ограничившись следующим типичным определением.

Определение 1. *Числовой ряд* $\sum c_n$ *называется произведением числовых рядов* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$, *если*

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1, \qquad n \geq 2.$$

5. Понятие о бесконечном произведении

По аналогии с числовым рядом логично определить бесконечное произведение.

Определение 2. *Пусть дана последовательность положительных чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. *Числа*

$$P_1 = a_1,\ P_2 = a_1 a_2, \ldots, P_n = a_1 a_2 \ldots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k, \ldots$$

называются частными произведениями. Последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ *называется бесконечным произведением и обозначается* Πa_n. *Если последовательность частных произведений* $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P > 0,$$

то бесконечное произведение Πa_n называется сходящимся, а предел P называется значением бесконечного произведения и обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

В противном случае бесконечное произведение называется расходящимся.

Мы не станем доказывать специальных теорем о бесконечном произведении, а заметим, что его исследование сводится к исследованию числового ряда $\sum \log a_n$ с членами $\log a_n$ и частными суммами

$$S_n = \log P_n = \log \prod_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \log a_k.$$

Лекция 11

1. Предел и непрерывность функции в точке

Приступим к изучению поведения функций. Будем обозначать через $y = f(x)$ отображение f: $X \to Y$ множества X во множество Y. Наиболее интересны случаи, когда множество X являет собой отрезок или интервал числовой оси, включая интервалы с бесконечно удаленными крайними точками.

Одно из основных понятий математического анализа - непрерывность функции в точке, означающее близость значений функции $f(x)$ при близких значениях аргумента x. Начнем с определения чуть более общего понятия - предела функции в точке, выражающего условие приближения значений $f(x)$ к предельному числу при приближении x к точке x_0. Известны два заметно различных подхода к введению понятий предела и непрерывности. Первое из них, высказанное на строгом логическом языке, принадлежит Коши.

<u>Определение 1.</u> *Число l называется пределом функции f в точке x_0 на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ x \neq x_0,\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

и обозначается

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

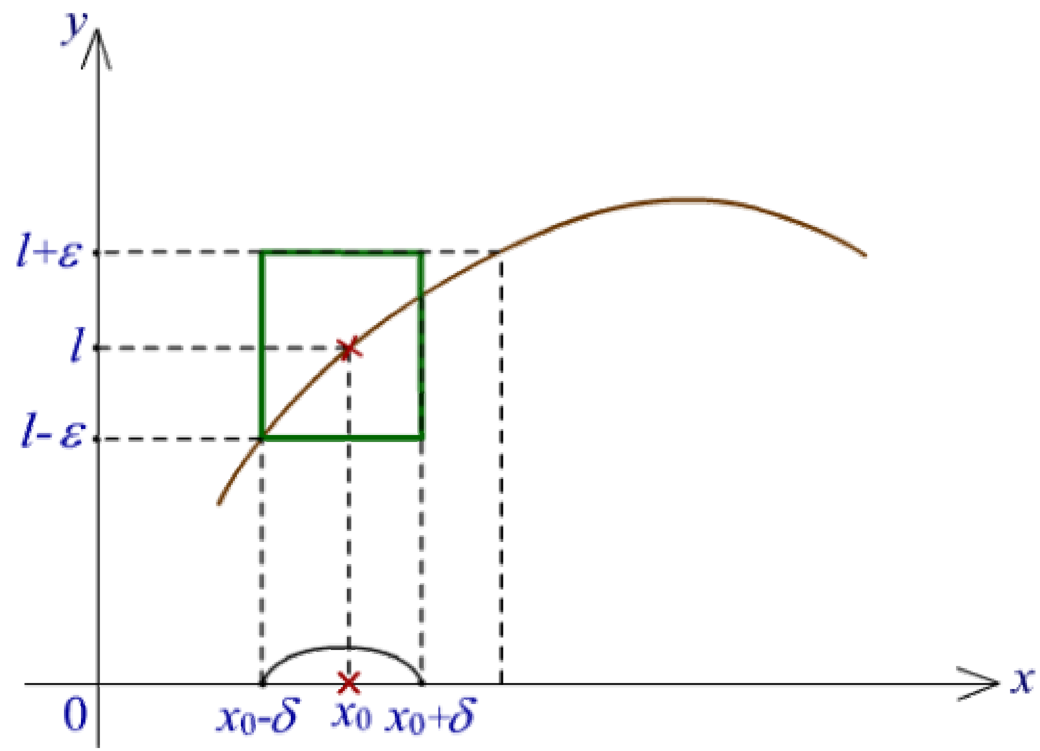


Рис. 1. Иллюстрация к определению предела функции.

Другой подход связан с использованием языка последовательностей и применением накопленных знаний о сходящихся последовательностях. Следующее определение называют именем Гейне.

<u>Определение 2.</u> *Число l называется пределом функции f в точке x_0 на множестве X, если для любой последовательности* x_1, x_2, ..., x_n, ... *такой, что* $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $n \geq 1$, *и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Коль скоро появилось два определения одного и того же понятия, мы должны на этом этапе различать предел в смысле Коши и в смысле Гейне.

Обратим внимание, что в определениях предела функции точка x_0 исключается из рассмотрения независимо от того, принадлежит она множеству X или нет. Если все же, во-первых, принять, что $x_0 \in X$ и, во-вторых, $f(x_0) = l$, то в обоих предыдущих определениях можно снять запрет $x \neq x_0$ или $x_n \neq x_0$ и не проверять, что произойдет в таком случае, потому что неравенство в определении Коши тривиально выполняется при $x = x_0$ и требование в определении Гейне нисколько не пострадает, если некоторые из x_n окажутся равными x_0. Таким образом, естественно приходим к понятию непрерывности функции в точке в смысле Коши и в смысле Гейне.

Определение 3. *Пусть $x_0 \in X$. Функция f называется непрерывной в точке x_0 на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В противном случае функция f называется разрывной в точке x_0.

Определение 4. *Пусть $x_0 \in X$. Функция f называется непрерывной в точке x_0 на множестве X, если для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такой, что $x_n \in X$, $n \geq 1$, и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

В противном случае функция f называется разрывной в точке x_0.

Во всех четырех определениях будем опускать слова "на множестве X", если множество X содержит интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$, за исключением, быть может, самой точки x_0 в определениях 1 и 2.

Интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ условимся называть δ-окрестностью точки x_0.

Связь между понятиями предела и непрерывности выражается очевидным предложением: *функция f непрерывна в точке* $x_0 \in X$, *если* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Эквивалентность определений Коши и Гейне

Наличие двух смыслов в определениях предела и непрерывности принесло бы много путаницы, однако замечательно, что оба смысла идентичны и мы сможем выбирать любой из подходов в каждой конкретной задаче.

Теорема 1. *Определения Коши и Гейне предела или непрерывности функции в точке* x_0 *на множестве X эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство для предела и непрерывности функции выглядят весьма сходно, поэтому ограничимся, например, демонстрацией эквивалентности понятий непрерывности по Коши и по Гейне.

Начнем с доказательства того, что непрерывность в смысле Коши влечет непрерывность в смысле Гейне. Пусть для функции *f* выполнены условия определения 3

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Выберем произвольно последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, принадлежащих множеству X, такую, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. По определению предела последовательности

$$\exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n - x_0| < \delta.$$

Тогда по определению 3 выполняется неравенство

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Собирая вместе все условия, сформулируем заключение

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

которое означает, что выполняется определение Гейне, так как

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Обратно, покажем теперь, что непрерывность в смысле Гейне влечет непрерывность в смысле Коши. Пусть для функции f выполнены условия определения 4. Проведем доказательство от противного. Предположим, что функция f не удовлетворяет условию определения 3. Нетрудно записать отрицание предиката. Для этого следует заменить кванторы на противоположные и написать отрицание имеющегося высказывания. Таким образом, отрицание требования в определении 3 представим в виде

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in X\ \ |x - x_0| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Будем выбирать различные δ. Если $\delta = 1$, то

$$\exists x_1 \in X\ \ |x_1 - x_0| < 1 \quad \text{и} \quad |f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Если $\delta = 1/2$, то

$$\exists x_2 \in X\ \ |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad |f(x_2) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

И так далее. На n-м шаге если $\delta = 1/n$, то

$$\exists x_n \in X\ \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Продолжим процесс неограниченно. В итоге получим последовательность точек $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, принадлежащих X и удовлетворяющих перечисленным условиям. Так как $|x_n - x_0| < 1/n$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. И по определению 4 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, что противоречит неравенству $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Возникшее противоречие доказывает ложность предположения. Следовательно, функция f непрерывна в точке x_0 на множестве X в смысле Коши. Теорема 1 доказана.

3. Арифметические действия над непрерывными функциями

Покажем, что понятие непрерывности инвариантно относительно арифметических действий.

Теорема 2. *Пусть функции f и g непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f + g$, $f - g$, fg и f/g непрерывны в точке x_0. В случае частного предполагаем дополнительно, что $g(x) \neq 0$.*

Доказательство. Воспользуемся определением непрерывности по Гейне и инвариантностью понятия предела последовательности относительно арифметических действий. Выберем произвольно последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ из области определения функций f и g такую, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда по определению Гейне

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad u \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0).$$

По теореме 1 лекции 5 заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)+g(x_n)\big) = f(x_0)+g(x_0), \quad \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)-g(x_n)\big) = f(x_0)-g(x_0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\,g(x_0)\big), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

По определению Гейне, примененнному к результатам арифметических действий, заключаем, что функции $f+g, f-g, fg$ и f/g непрерывны в точке x_0. Теорема 2 доказана.

Естественно, аналогичная теорема с подобным доказательством верна и для предела функции. Именно, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad u \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = l+m, \quad \lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = l-m, \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}.$$

В случае частного предполагаем дополнительно, что $g(x) \neq 0$ и $m \neq 0$.

4. Непрерывность сложной функции

Покажем, что понятие непрерывности инвариантно также относительно композиции.

Теорема 3. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $z = g(y)$ *непрерывна в точке* y_0, $y_0 = f(x_0)$. *Тогда сложная функция* $z = g(f(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что сложная функция определена в некоторой δ-окрестности точки x_0. Действительно, функция g определена в некоторой ε-окрестности точки y_0. Но определение Коши непрерывности функции f в точке x_0 гарантирует существование δ-окрестности точки x_0, которая при отображении f переходит в ε-окрестность точки y_0.

Перейдем к непосредственному доказательству утверждения теоремы 3. Для этого воспользуемся определением непрерывности по Гейне функции f в точке x_0. Выберем произвольно последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ из δ-окрестности точки x_0 такую, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда по определению Гейне

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Теперь воспользуемся определением непрерывности по Гейне функции g в точке y_0 применительно к последовательности

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 = f(x_0).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0).$$

Подставим в последнее соотношение $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$ и придем к определению Гейне непрерывности сложной функции $z = g(f(x))$ в точке x_0. Теорема 3 доказана.

5. Сохранение знака функции в окрестности точки непрерывности

Следующая теорема бывает полезной в различных задачах.

Теорема 4. *Пусть функция* f *непрерывна в точке* x_0 *и* $f(x_0) \neq 0$. *Тогда существует* δ-*окрестность точки* x_0, *в которой значения* $f(x)$ *не меняют знака.*

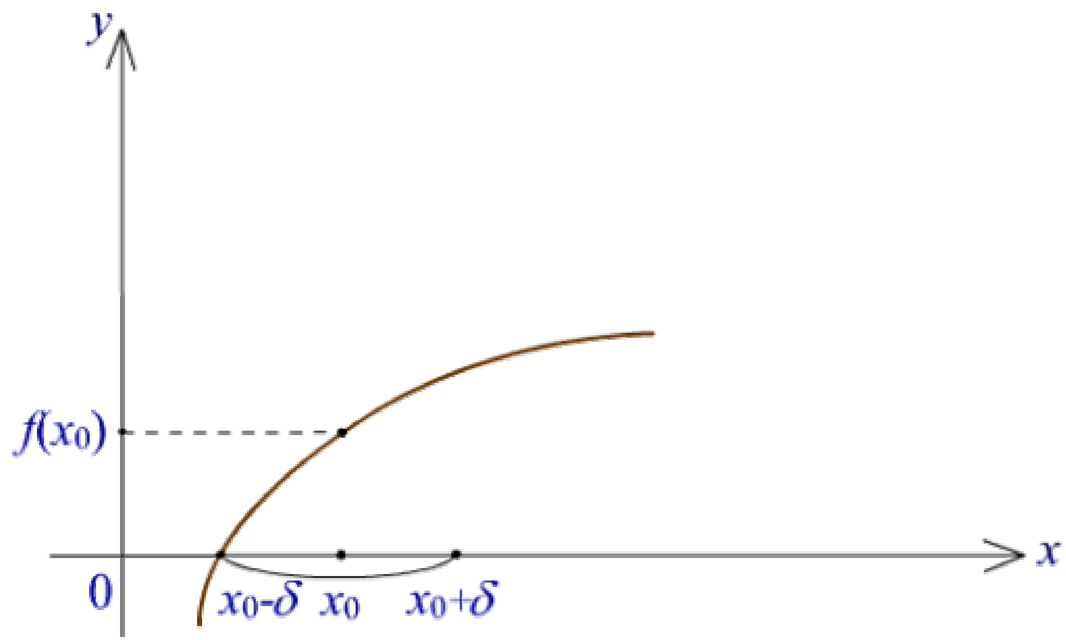


Рис. 2. Иллюстрация к теореме о сохранении знака функции в окрестности точки непрерывности.

Доказательство. Остановимся на случае $f(x_0) > 0$, справедливо полагая, что доказательство в случае $f(x_0) < 0$ совершенно симметрично. Воспользуемся определением Коши непрерывности функции f в точке x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Положим здесь $\varepsilon = f(x_0) > 0$. Тогда неравенство $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$, эквивалентное системе двух неравенств

$$-f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0),$$

влечет неравенство

$$f(x) > 0,$$

справедливое для всех x из δ-окрестности точки x_0. Теорема 3 доказана.

Лекция 12

1. Критерий Коши существования предела функции

Выведем критерий Коши существования предела функции в точке, аналогичный по смыслу критерию Коши сходимости последовательности.

Теорема 1. *Функция f имеет предел в точке x_0 на множестве X тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X, x \neq x_0, x' \neq x_0,\quad |x - x_0| < \delta \text{ и } |x' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Утверждение теоремы 1 имеет характер необходимого и достаточного условия существования предела функции. Начнем с доказательства необходимости условия. Предположим, что функция f имеет предел l в точке x_0 на множестве X. Тогда по определению Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, x \neq x_0,\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Помимо точки x, выберем произвольно точку $x' \in X$, $x' \neq x_0$, $|x' - x_0| < \delta$. Согласно определению предела функции для x' также, как и для x, выполняется неравенство

$$|f(x') - l| < \varepsilon.$$

Осталось записать нехитрую логическую цепочку соотношений, основанную на сложении двух неравенств

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, x' \in X, x \neq x_0, x' \neq x_0,\quad |x - x_0| < \delta \text{ и } |x' - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - l + l - f(x')| \le |f(x) - l| + |l - f(x')| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Поскольку ε - произвольное положительное число, то и 2ε - тоже произвольное положительное число, поэтому последнее условие эквивалентно условию Коши в формулировке теоремы 1. Это доказывает необходимость условия Коши для существования предела функции.

Перейдем к доказательству достаточности условия Коши. Пусть выполняется условие теоремы 1. Выберем произвольно на множестве X последовательность точек $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, отличных от x_0, сходящуюся к x_0. По определению предела последовательности

$$\exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |x_n - x_0| < \delta.$$

Пусть $n > n_0$ и $m > n_0$. Для x_n и x_m выполнены неравенства

$$|x_n - x_0| < \delta \text{ и } |x_m - x_0| < \delta$$

и следовательно,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Собирая все условия воедино, запишем логическую цепочку

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0,\ m > n_0\ \ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

которая означает фундаментальность последовательности $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$. По критерию Коши эта последовательность сходится, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

Осталось показать, что предел l не зависит от выбора последовательности точек. Пусть на множестве X даны две последовательности точек $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и $x_1', x_2', ..., x_n', ...$, отличных от x_0, сходящихся к x_0. По доказанному

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \quad u \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n') = l'.$$

Образуем последовательность точек

$$x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots,$$

отличных от x_0, сходящуюся к x_0. По доказанному последовательность

$$f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \ldots, f(x_n), f(x_n'), \ldots$$

также сходится. Поскольку числа l и l' являются ее частичными пределами, то $l = l'$. Таким образом, предел l не зависит от выбора последовательности точек. Теперь по определению Гейне заключаем, что функция f имеет предел l в точке x_0 на множестве X и завершаем доказательство теоремы 1.

2. Односторонние пределы и непрерывность функции

В определениях Коши и Гейне предела и непрерывности функции выбор точек x или x_n был весьма произвольным. Если ограничить свой выбор точками, расположенными по одну сторону от x_0, то придем к понятию одностороннего предела и односторонней непрерывности функции в точке. Будем считать, что множество X определения функции f содержит некоторую полуокрестность $\{x\colon x_0 - \delta < x < x_0\}$ в одном случае и $\{x\colon x_0 < x < x_0 + \delta\}$ в другом случае. Начнем с определений Коши.

Определение 1. *Число l называется пределом слева функции f в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

и обозначается

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \textit{ или } f(x_0 - 0).$$

Если, кроме того, функция f определена в точке x_0 и $f(x_0) = l$, то f называется непрерывной слева в точке x_0.

Аналогично число l называется пределом справа функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

и обозначается

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x),\ \textit{или}\ f(x_0+0).$$

Если, кроме того, функция f определена в точке x_0 и $f(x_0) = l$, то f называется непрерывной справа в точке x_0.

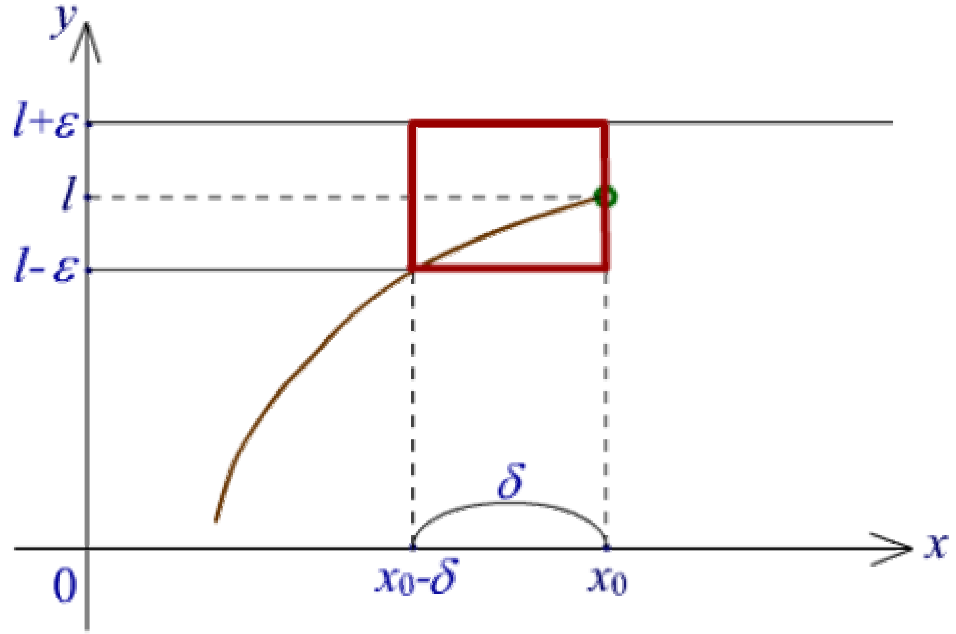


Рис. 1. Иллюстрация к определению непрерывной слева функции.

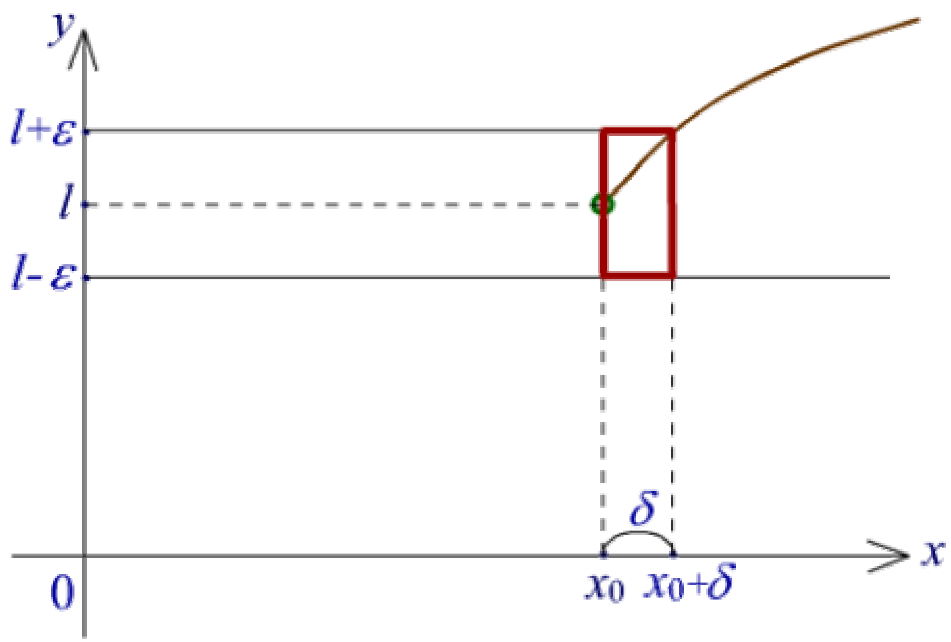


Рис. 2. Иллюстрация к определению непрерывной справа функции.

Подобным образом обобщим определения Гейне.

<u>Определение 2.</u> *Число l называется пределом слева функции f в точке x_0, если для любой последовательности точек x_1, x_2, ..., x_n, ... из X таких, что*

$$x_n < x_0, \quad n \geq 1, \quad и \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Если, кроме того, функция f определена в точке x_0 и $f(x_0) = l$, то f называется непрерывной слева в точке x_0.

Аналогично число l называется пределом справа функции f в точке x_0, если для любой последовательности точек x_1, x_2, ..., x_n, ... из X таких, что

$$x_n > x_0, \quad n \geq 1, \quad и \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = l.$$

Если, кроме того, функция f определена в точке x_0 и $f(x_0) = l$, то f называется непрерывной справа в точке x_0.

Определение 3. *Пределы слева и справа называются односторонними пределами функции в точке. Непрерывность слева или справа называется односторонней непрерывностью функции в точке.*

Практически дословное повторение рассуждений предыдущей лекции приводит к заключению об эквивалентности определений Коши и Гейне односторонних пределов и односторонней непрерывности функции в точке.

Покажем, что односторонние подходы к точке естественным образом связаны с произвольным подходом.

Теорема 2. *Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда f имеет в этой точке предел слева и предел справа, которые равны между собой.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость условия теоремы 2. Пусть функция f имеет предел l в точке x_0. Тогда по определению Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ x \neq x_0,\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Поскольку неравенство $|x - x_0| < \delta$ равносильно объединению неравенств $x_0 - \delta < x \leq x_0$ и $x \leq x_0 + \delta$, то последнее условие означает, что

$$l = \lim_{x\to x_0-0} f\left(x\right) = \lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right),$$

что доказывает необходимость условия теоремы 2.

Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы 2. Пусть функция f имеет в точке x_0 предел слева и предел справа, которые равны числу l. Тогда по определению Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x \in X\ \ x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall x \in X\ \ x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда условие $|x - x_0| < \delta$ влечет неравенства $x_0 - \delta_1 < x \le x_0$ или $x_0 \le x < x_0 + \delta_2$. Объединяя два последних условия, запишем совокупное условие

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, x \neq x_0,\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

которое означает, что $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ и доказывает достаточность условия теоремы 2.

Теорема 2 доказана полностью.

Если в теореме 2 включить в рассмотрение точку x_0 и положить $f(x_0) = l$, то приходим к утверждению: *функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда f непрерывна слева и непрерывна справа в этой точке.*

3. Односторонние пределы монотонной функции

Напомним характеристики монотонной функции.

Определение 4. *Пусть функция f определена на отрезке* $[a, b]$. *Функция f называется · неубывающей, если* $\forall x_1, x_2 \in [a, b]\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$; · *возрастающей, если* $\forall x_1, x_2 \in [a, b]\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; · *невозрастающей, если* $\forall x_1, x_2 \in [a, b]\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$; · *убывающей, если* $\forall x_1, x_2 \in [a, b]\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; · *монотонной, если она не убывает или не возрастает*; · *строго монотонной, если она возрастает или убывает.*

Аналогичные определения возможны для интервала (a, b) или для множеств $[a, b)$ и $(a, b]$.

Покажем, что монотонные функции имеют односторонние пределы в каждой точке.

Теорема 3. *Пусть функция f монотонна в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда f имеет односторонние пределы в точке x_0.*

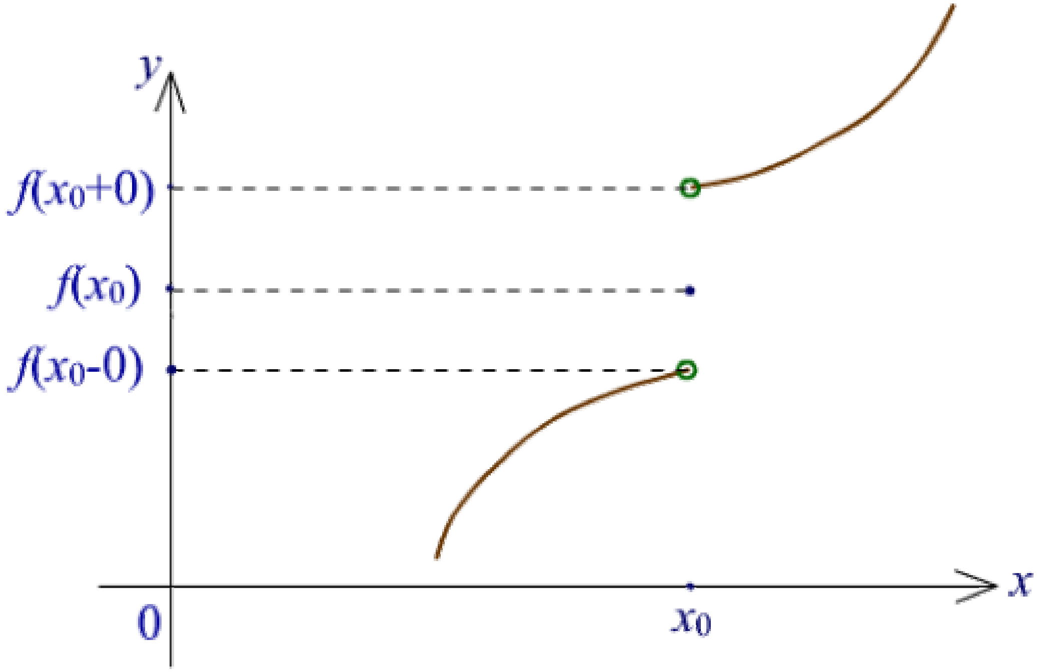


Рис. 3. Иллюстрация к теореме о существовании односторонних пределов.

Доказательство. Теорема 3 содержит четыре симметричных утверждения о существовании предела слева и предела справа для неубывающих и невозрастающих функций. Проведем подробное доказательство лишь для одного из случаев, подразумевая, что остальные ему аналогичны.

Пусть функция f не убывает. Покажем, что она имеет предел слева в точке x_0. Поскольку $f(x) \le f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то множество значений $\{f(x)\colon x_0 - \delta < x < x_0\}$ ограничено сверху и поэтому имеет верхнюю грань. Обозначим

$$\alpha = \sup_{x_0-\delta<x<x_0} f(x)$$

и докажем, что

$$\alpha = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

По свойству верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (x_0 - \delta, x_0)\ \ f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

Обозначим $\delta_1 = x_0 - x_\varepsilon > 0$. Благодаря монотонности функции и свойству верхней грани $f(x_\varepsilon) \le f(x) \le \alpha$ для всех $x \in (x_\varepsilon, x_0)$.

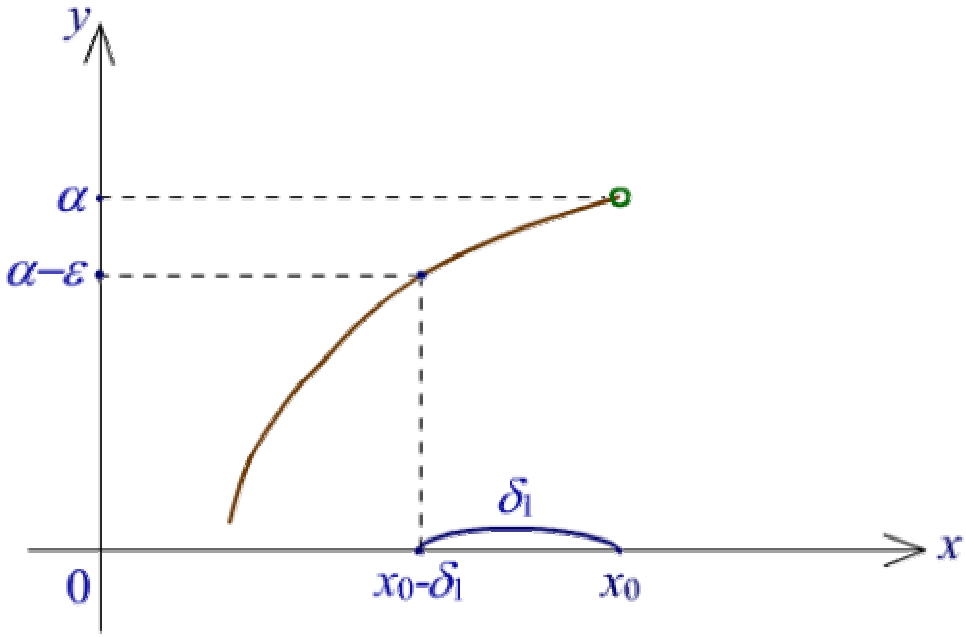


Рис. 4. Иллюстрация к определению непрерывной слева функции.

Соединяя все условия вместе заключаем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \quad \alpha - \varepsilon < f(x) \le \alpha.$$

Так как система неравенств $\alpha - \varepsilon < f(x) \le \alpha$ влечет неравенство $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$, то последнее условие определяет α как предел слева функции f в точке x_0 и доказывает теорему 3.

В процессе доказательства, помимо качественного заключения теоремы 3, мы установили, что для неубывающей функции f

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \quad и \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x),$$

а для невозрастающей функции *f*

$$f\left(x_0-0\right)=\lim_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=\inf_{x<x_0} f\left(x\right) \quad и \quad f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=\sup_{x>x_0} f\left(x\right).$$

4. Классификация точек разрыва функции

Разумеется, непрерывные функции проще в исследовании, чем разрывные. Однако следует уметь работать и с разрывными функциями, для чего важно знать, как ведет себя функция в окрестности точки разрыва. Дадим классификацию точек разрыва.

Определение 5. *Пусть функция f определена в δ-окрестности точки x_0. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f, если f имеет предел в точке x_0, но*

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right).$$

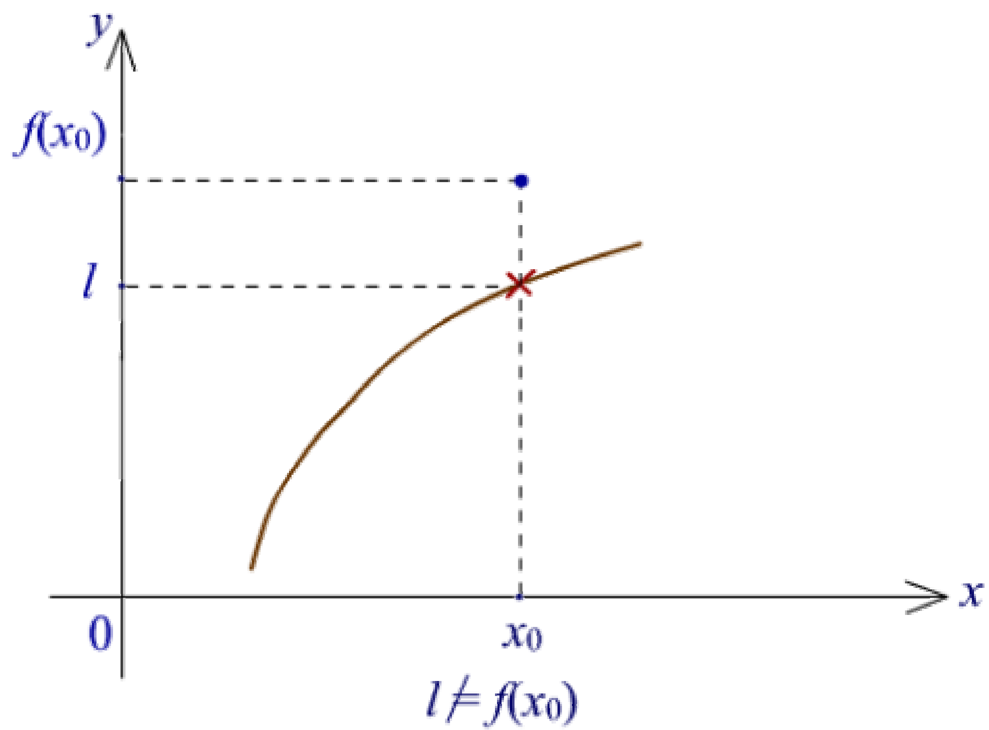


Рис. 5. Иллюстрация к определению точки устранимого разрыва.

Терминология вполне объяснима. Действительно, достаточно подправить функцию, изменив ее только в одной точке x_0 и положив $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$, как исправленная функция станет непрерывной в точке x_0.

<u>Определение 6.</u> *Пусть функция f определена в δ-окрестности точки x_0. Точка x_0 называется точкой разрыва* 1 *рода функции f, если f имеет предел слева и предел справа в точке x_0, но*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

В этом случае разность $\lim_{x\to x_0+0} f(x)-\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ *называется скачком функции f в точке x_0.*

См рис. 3.

Определение 7. *Точка разрыва функции f называется точкой разрыва* 2 *рода, если она не является точкой устранимого разрыва или точкой разрыва* 1 *рода.*

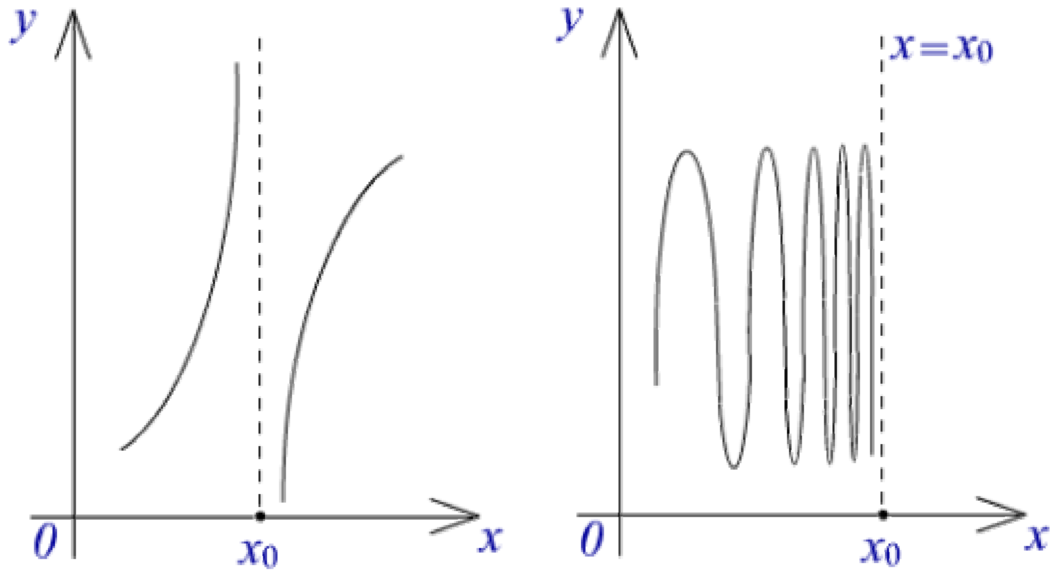


Рис. 6. Иллюстрация к определению точек разрыва первого и второго рода.

5. Символы *O* и *o*

Распространим определение предела функции на случай бесконечно удаленной точки. Начнем с определения Коши.

Определение 8. *Пусть функция f определена для всех* $x \geq a$. *Число l называется пределом функции f при* $x \to \infty$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > a\ \forall x > M\ \ |f(x) - l| < \varepsilon,$$

и обозначается $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Предел $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ определяется симметрично.

Полезно также описание функций, стремящихся к бесконечности.

<u>Определение 9.</u> *Говорят, что функция f стремится к ∞ при $x \to x_0$ на множестве X, если*

$$\forall M\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Описание функций, стремящихся к $-\infty$, дается симметрично.

Введем терминологию, частично заимствованную из теории последовательностей.

<u>Определение 10.</u> *Функция f называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

<u>Определение 11.</u> *Функция f называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $|f(x)|$ стремится к ∞ при $x \to x_0$.*

Теперь введем O- и o-символику для сравнения бесконечно малых и бесконечно больших функций.

<u>Определение 12.</u> *Пусть функции f и g бесконечно малы при $x \to x_0$ и*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Если $l = 1$, то функции f и g называются эквивалентными.

Если $l = 0$, то говорят, что бесконечно малая функция f более высокого порядка, чем бесконечно малая функция g, и пишут

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Если дробь $(f(x)/g(x))$ ограничена в δ-окрестности точки x_0, то пишут

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Например, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, а $x\sin x = O(x)$ при $x \to 0$.

<u>Определение 13.</u> *Пусть функции f и g являются бесконечно большими при $x \to x_0$ и*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Если $l = 1$, *то функции* f *и* g *называются эквивалентными.*

Если $l = 0$, *то говорят, что бесконечно большая функция* f *более низкого порядка, чем бесконечно большая функция* g, *и пишут*

$$f(x) = o(g(x)) \ \ \textit{при} \ \ x\to x_0.$$

Если дробь $f(x)/g(x)$ *ограничена в* δ*-окрестности точки* x_0, *то пишут*

$$f(x) = O(g(x)) \ \ \textit{при} \ \ x\to x_0.$$

Определения 10-13 имеют смысл и для $x_0 = \infty$ или $x_0 = -\infty$.

Лекция 13

1. Равномерная непрерывность

От понятия непрерывности в точке перейдем к понятию непрерывности на множестве.

Определение 1. *Функция f называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Используя определение непрерывности в точке, дадим логическое определение непрерывности на множестве. Именно, функция f, определенная на множестве X, непрерывна на этом множестве, если

$$\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В этом определении число δ зависит от ε и от x_0. Более сильное требование заключается в наличии универсального δ для всех x_0, зависяшего только от ε.

Определение 2. *Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X \ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Очевидно, что равномерная непрерывность на множестве X влечет непрерывность на этом множестве. Покажем на примерах, что обратное неверно.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$, $X = \mathbb{R}$. Предположим, что f равномерно непрерывна на X. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X\ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |x^2 - x'^2| < \varepsilon.$$

Положим, например, в последнем неравенстве $|x - x'| = \delta/2$ и получим

$$|x + x'| < \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что не может выполняться для достаточно больших x и x'. Полученное противоречие показывает, что функция f не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, хотя, конечно, непрерывна в каждой точке.

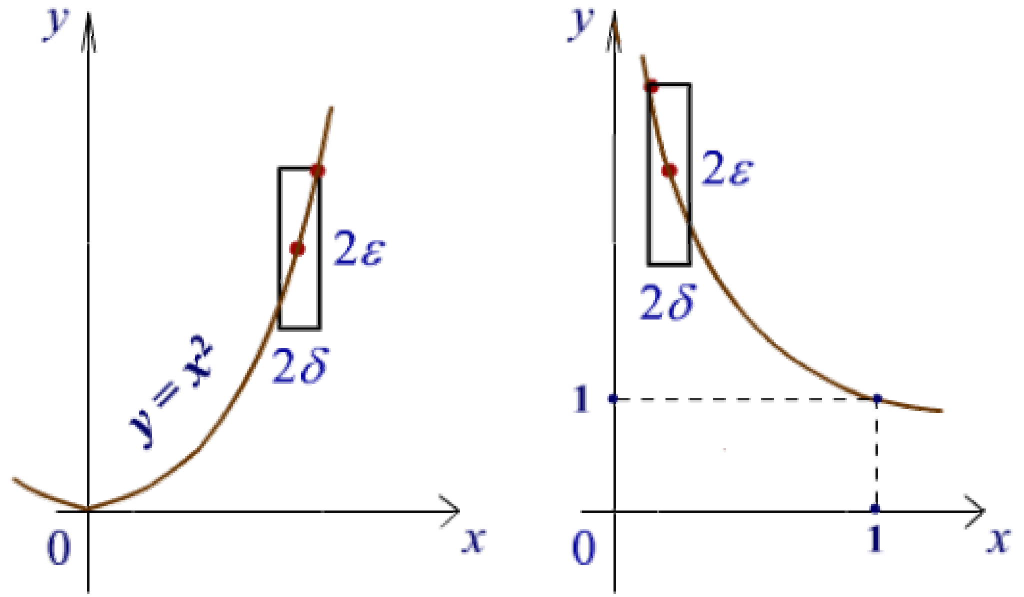


Рис. 1. Иллюстрация различия понятий непрерывности и равномерной непрерывности на примере функции $y = x^2$

Пример 2. Пусть $f(x) = 1/x$, $X = (0, 1)$. Предположим, что f равномерно непрерывна на X. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X\ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| < \varepsilon.$$

Положим, например, в последнем неравенстве $|x - x'| = \delta/2$ и получим

$$xx' > \frac{\delta}{2\varepsilon},$$

что не может выполняться для x, x', достаточно близких к 0. Полученное противоречие показывает, что функция f не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$, хотя, конечно, непрерывна в каждой точке.

2. Теорема Кантора

Противоречие примера 1 возникло при неограниченно больших x, x', а в примере 2 противоречие возникло при бесконечно малых x, x'. Подобный выбор точек невозможен в случае, когда X является отрезком. Покажем, что непрерывность функции на отрезке равносильна ее равномерной непрерывности. Следующая теорема принадлежит Кантору.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то f равномерно непрерывна на* $[a, b]$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, но не является равномерно непрерывной. Запишем отрицание условия равномерной непрерывности

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, x' \in [a, b]\ \ |x - x'| < \delta \ \text{ и }\ |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Используем возможность произвольного выбора δ. Положим $\delta = 1$, тогда

$$\exists x_1, x'_1 \in [a, b]\ \ |x_1 - x'_1| < 1 \ \text{ и }\ |f(x_1) - f(x'_1)| \geq \varepsilon.$$

Выберем $\delta = 1/2$, тогда

$$\exists x_2, x_2' \in [a, b]\ \ |x_2 - x_2'| < \frac{1}{2} \ \text{ и }\ |f(x_2) - f(x_2')| \geq \varepsilon.$$

И так далее. На n-м шаге выберем $\delta = 1/n$, тогда

$$\exists x_n, x_n' \in [a, b]\ \ |x_n - x_n'| < \frac{1}{n} \ \text{ и }\ |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon.$$

Продолжим процесс неограниченно. В итоге получим две последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и $x'_1, x'_2, ..., x'_n, ...$, удовлетворяющие перечисленным условиям. По теореме Больцано-Вейерштрасса первая из этих двух ограниченных последовательностей содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}, ...$. Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Поскольку для всех $k \geq 1$ справедливы неравенства

$$a \leq x_{nk} \leq b,$$

то те же неравенства справедливы и для x_0, то есть $x_0 \in [a, b]$.

Из равенства $x'_{nk} = x_{nk} + (x'_{nk} - x_{nk})$, где первое слагаемое сходится к x_0, а второе - к 0, следует, что подпоследовательность $x'_{n1}, x'_{n2}, ..., x_{nk}', ...$ второй из полученных последовательностей также сходится к x_0.

Образуем последовательность

$$x_{n1}, x'_{n1}, x_{n2}, x'_{n2}, ..., x_{nk}, x'_{nk}, ...,$$

которая, очевидно, сходится к x_0. Напомним, что функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, непрерывна и в точке $x_0 \in [a, b]$. Следовательно, по определению Гейне последовательность

$$f(x_{n1}), f(x'_{n1}), f(x_{n2}), f(x'_{n2}), ..., f(x_{nk}), f(x'_{nk}), ...$$

сходится к $f(x_0)$. По критерию Коши эта последовательность фундаментальна, что противоречит неравенству

$$|f(x_{nk}) - f(x'_{nk})| \geq \varepsilon,$$

справедливому для всех $k \geq 1$. Противоречие устанавливает ложность сделанного предположения и заканчивает доказательство теоремы 1.

3. Первая теорема Вейерштрасса

Кроме равномерной непрерывности, свойство непрерывности на отрезке гарантирует и другие любопытные глобальные свойства функции. Так, в отличие от примеров 1 и 2, такие функции обязаны быть ограниченными, что будет доказано в следующей теореме, известной под названием первой теоремы Вейерштрасса.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Покажем, что она ограничена, то есть

$$\exists M \ \forall x \in [a, b] \ \ |f(x)| \le M.$$

Проведем доказательство от противного. Предположим, что функция f не ограничена. Запишем отрицание условия ограниченности

$$\forall M \ \exists x \in [a, b] \ \ |f(x)| > M.$$

Используем возможность произвольного выбора M. Положим $M = 1$, тогда

$$\exists x_1 \in [a, b] \ \ |f(x_1)| > 1.$$

Выберем $M = 2$, тогда

$$\exists x_2 \in [a, b] \ \ |f(x_2)| > 2.$$

И так далее. На n-м шаге выберем $M = n$, тогда

$$\exists x_n \in [a, b] \ \ |f(x_n)| > n.$$

Продолжим процесс неограниченно. В итоге получим последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, удовлетворяющую перечисленным условиям. По теореме Больцано-Вейерштрасса эта ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots$. Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Поскольку для всех $k \geq 1$ справедливы неравенства

$$a \leq x_{nk} \leq b,$$

то те же неравенства справедливы и для x_0, то есть $x_0 \in [a, b]$.

Напомним, что функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, непрерывна и в точке $x_0 \in [a, b]$. Следовательно, по определению Гейне последовательность

$$f(x_{n1}), f(x_{n2}), \ldots, f(x_{nk}), \ldots$$

сходится к $f(x_0)$ и поэтому ограничена, что противоречит неравенству

$$|f(x_{nk})| > n_k,$$

справедливому для всех $k \geq 1$. Противоречие устанавливает ложность сделанного предположения и заканчивает доказательство теоремы 2.

4. Вторая теорема Вейерштрасса

Еще одно свойство непрерывных на отрезке функций выражено в следующей теореме, которую назовем второй теоремой Вейерштрасса.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она достигает на этом отрезке своего максимума и минимума*.

Доказательство. Обозначим через Y образ отрезка $[a, b]$ при отображении f. По первой теореме Вейерштрасса функция f ограничена, поэтому множество Y ограничено. Пусть

$$\alpha = \sup Y, \qquad \beta = \inf Y.$$

Смысл утверждения теоремы 3 состоит в том, что $\alpha \in Y$ и $\beta \in Y$. Оба утверждения доказываются симметрично, поэтому проведем подробное доказательство лишь для α.

По свойству верхней грани множества существует последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ точек из множества Y, сходящаяся к α. Каждому $y_n \in Y$ соответствует точка $x_n \in [a, b]$ такая, что $y_n = f(x_n)$. Как и прежде, ограниченная последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots$. Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Поскольку для всех $k \geq 1$ справедливы неравенства

$$a \leq x_{nk} \leq b,$$

то те же неравенства справедливы и для x_0, то есть $x_0 \in [a, b]$.

Напомним, что функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, непрерывна и в точке $x_0 \in [a, b]$. Следовательно, по определению Гейне последовательность

$$f(x_{n1}), f(x_{n2}), \ldots, f(x_{nk}), \ldots$$

сходится к $f(x_0)$. Однако она является подпоследовательностью $y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nk}, \ldots$ последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, сходящейся к α. Поскольку подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, то

$$\alpha = f(x_0).$$

Мы доказали, что α является образом точки $x_0 \in [a, b]$ при отображении f и поэтому $\alpha \in Y$, что завершает доказательство теоремы 3.

5. Лемма о вложенных отрезках

Мы намереваемся вывести еще одно принципиальное свойство непрерывных на отрезке функций, но прежде подготовим для него вывод о том, что последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0, имеет единственную точку, общую для всех отрезков. Этот факт относится к теории действительных чисел, где играет заметную роль в сравнении различных моделей. Сформулируем результат в том виде, в котором станем использовать в последующих теоремах.

Лемма. *Пусть дана последовательность вложенных отрезков*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Тогда существует точка c такая, что

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

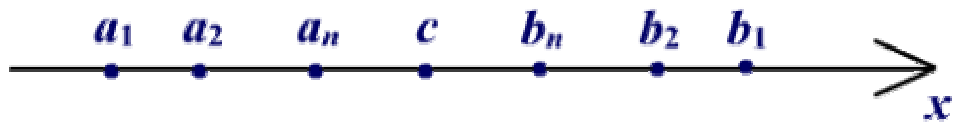


Рис. 2. Иллюстрация к лемме о вложенных отрезках

Доказательство. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ левых крайних точек системы вложенных отрезков не убывает, в то время как последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ их правых крайних точек не возрастает. Причем первая последовательность ограничена сверху, поскольку $a_n \le b_1$ для всех $n \ge 1$, а вторая последовательность ограничена снизу, поскольку $b_n \ge a_1$ для всех $n \ge 1$. Следовательно, обе последовательности сходятся. Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c_1, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = c_2.$$

В равенстве

$$c_2 - c_1 = (c_2 - b_n) + (b_n - a_n) + (a_n - c_1)$$

все три слагаемых в правой части являются бесконечно малыми при $n\to\infty$. Поэтому, переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем равенство

$$c_1 = c_2,$$

доказывающее теорему 4.

Очевидно, что для любого $n \geq 1$

$$a_n \leq \sup n \geq 1 \ \ a_n = c_1 = c_2 = \inf n \geq 1 \ b_n \leq b_n,$$

поэтому точка $c = c_1 = c_2$ принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$, $n \geq 1$.

Лекция 14

1. Теорема Коши о промежуточном значении

Геометрически совершенно ясно, что если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, в одной концевой точке принимает отрицательное значение, а в другой концевой точке - положительное значение, то график функции пересечет ось OX в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$.

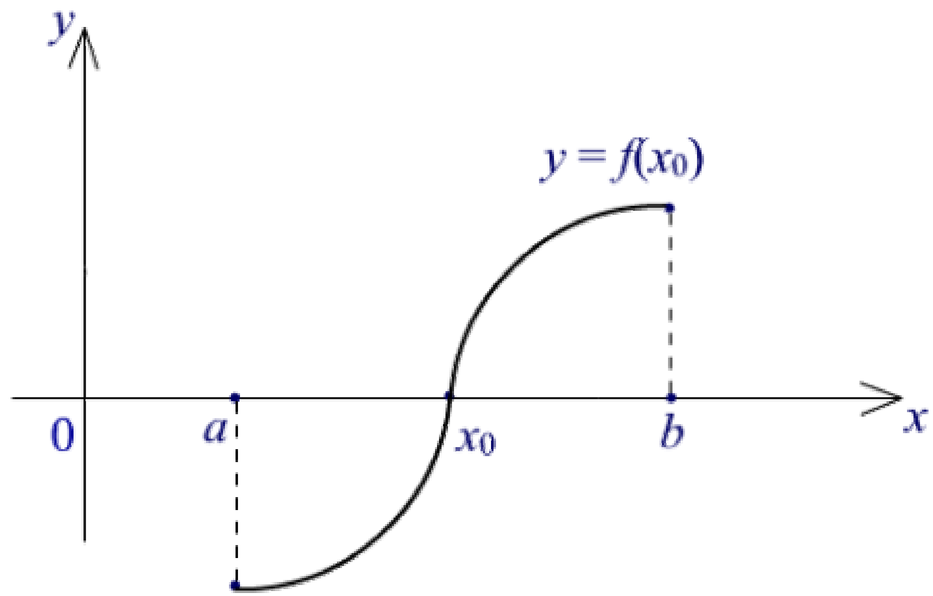


Рис. 1. Непрерывная функция, принимающая в концевых точках значения разного знака

Как ни удивительно, доказательство этого факта требует значительных аналитических усилий. Следующая теорема принадлежит Коши.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она принимает на этом отрезке все промежуточные значения между минимальным и максимальным.*

Доказательство. Прежде всего подтвердим, что согласно второй теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает своего минимума и максимума. Таким образом, существуют точки $a_1 \in [a, b]$ и $b_1 \in [a, b]$ такие, что

$$f(a_1) = m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \qquad f(b_1) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Предположим, например, что $a_1 < b_1$, в противном случае проведем симметричные рассуждения.

Выберем произвольно число μ, промежуточное между m и M, $m < \mu < M$. Требуется доказать, что найдется точка $c \in [a_1, b_1]$, для которой $f(c) = \mu$. Образуем функцию

$$g(x) = f(x) - \mu, \qquad x \in [a_1, b_1].$$

Функция g непрерывна на $[a, b]$, $g(a_1) = m - \mu < 0$, $g(b_1) = M - \mu > 0$. Ясно, что равенство $f(c) = \mu$ равносильно $g(c) = 0$.

Разделим отрезок $[a_1,b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$. Если

$$g(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0,$$

то искомая точка $c = (a_1 + b_1)/2$ найдена. В противном случае из двух половин $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ отрезка $[a_1, b_1]$ выберем ту, на концах которой функция g принимает значения разных знаков. Обозначим выбранную половину через $[a_2, b_2]$.

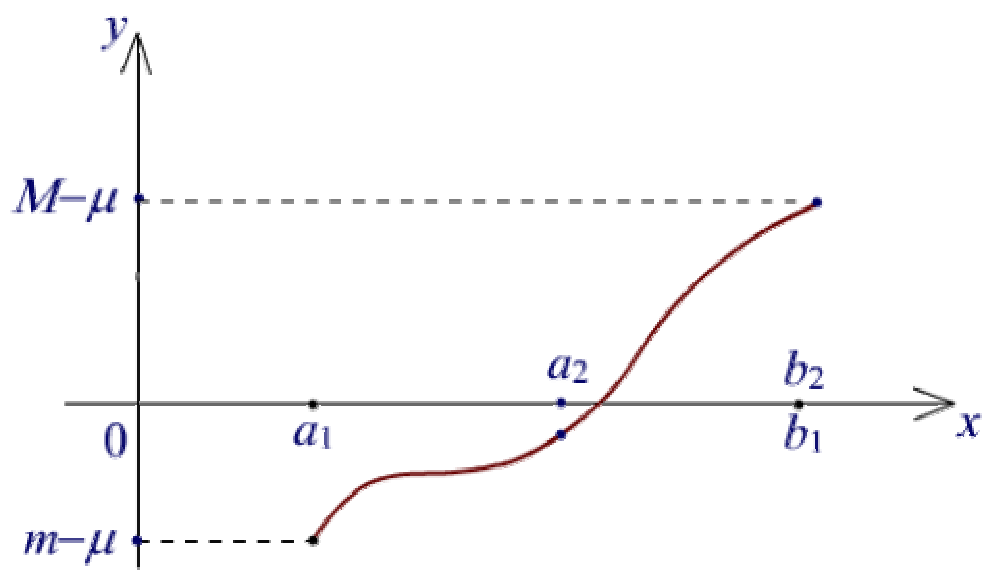


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству теоремы Коши о промежуточном значении

Снова разделим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам точкой $(a_2 + b_2)/2$. Если

$$g(\frac{a_2 + b_2}{2}) = 0,$$

то искомая точка $c = (a_2 + b_2)/2$ найдена. В противном случае из двух половин $[a_2, (a_2+b_2)/2]$ и $[(a_2 + b_2)/2, b_2]$ отрезка $[a_2, b_2]$ выберем ту, на концах которой функция g принимает значения разных знаков. Обозначим выбранную половину через $[a_3, b_3]$.

И так далее. На n-м шаге разделим отрезок $[a_n, b_n]$ пополам точкой $(a_n + b_n)/2$. Если

$$g(\frac{a_n + b_n}{2}) = 0,$$

то искомая точка $c = (a_n + b_n)/2$ найдена. В противном случае из двух половин $[a_n, (a_n + b_n)/2]$ и $[(a_n + b_n)/2, b_n]$ отрезка $[a_n, b_n]$ выберем ту, на концах которой функция g принимает значения разных знаков. Обозначим выбранную половину через $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Продолжим процесс неограниченно. В итоге получим последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

удовлетворяющую условиям:

1. $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$, $n \geq 1$;

2. на концах каждого из отрезков функция g принимает значения разных знаков.

Поскольку

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_1 - a_1}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то по лемме о вложенных отрезках существует точка $c \in [a_1, b_1]$ такая, что

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

По созданному алгоритму функция g принимает отрицательные значения в точках a_n и положительные значения в точках b_n. Функция g, непрерывная на $[a, b]$, непрерывна и в точке $c \in [a, b]$. По определению Гейне обе последовательности

$$g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_n), \ldots \quad \text{и} \quad g(b_1), g(b_2), \ldots, g(b_n), \ldots$$

сходятся к $g(c)$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве

$$g(a_n) < 0$$

приходим к неравенству $g(c) \leq 0$.

Аналогично переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве

$$g(b_n) > 0$$

приходим к неравенству $g(c) \geq 0$.

Два полученных неравенства приводят к равенству $g(c) = 0$ и доказывают теорему 1.

Теорема 1 может быть переформулирована иначе: *если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она отображает* $[a, b]$ *на отрезок* $[m, M]$.

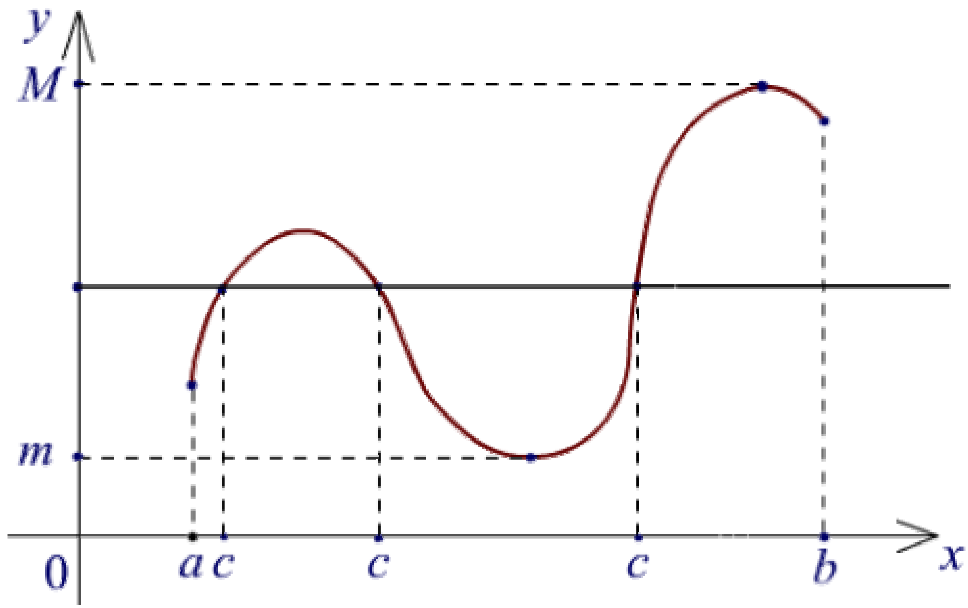


Рис. 3. Иллюстрация к теореме Коши о промежуточном значении

По существу теорема 1 гарантирует разрешимость уравнения

$$f(x) = 0$$

на отрезке $[a, b]$ при условии, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. И вновь доказательство предлагает больше информации, чем написано в формулировке. В нем дается вычислительный алгоритм поиска решения - так называемый метод деления отрезка пополам.

2. Непрерывность обратной функции

Докажем теорему существования и непрерывности обратной функции.

Теорема 2. *Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и отображает его на отрезок $[m, M]$. Тогда на отрезке $[m, M]$ существует обратная функция f^{-1}, которая непрерывна на $[m, M]$.*

Доказательство. Пусть функция f строго возрастает на $[a, b]$. В случае убывающей функции рассуждения симметричны. Начнем с доказательства существования обратной функции.

Если $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Следовательно, f осуществляет взаимно однозначное отображение $[a, b]$ на $[m, M]$ и поэтому имеет обратное отображение f^{-1}.

Теперь покажем, что f^{-1} непрерывна на $[m, M]$. Пусть $y_0 \in [m, M]$. Тогда существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) = y_0$, то есть $y_0 = f^{-1}(x_0)$. Предположим, что y_0 не совпадает с m или M, а значит x_0 не совпадает с a или b. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$. Обозначим

$$f(x_0 - \varepsilon) = y_1, \qquad f(x_0 + \varepsilon) = y_2.$$

Функция f взаимно однозначно отображает отрезок $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ на $[y_1, y_2]$, а f^{-1} взаимно однозначно отображает отрезок $[y_1, y_2]$ на $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

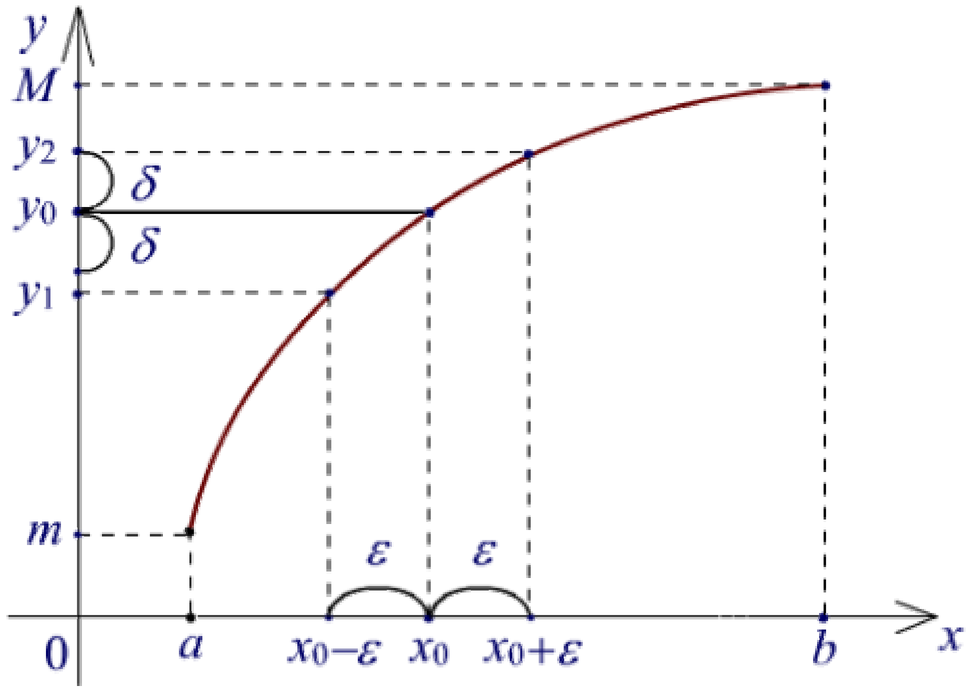


Рис. 4. Иллюстрация к доказательству теоремы существования и непрерывности обратной функции

Обозначим

$$\min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\} = \delta, \qquad \delta > 0.$$

Функция f^{-1} отображает интервал $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ в интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Этот факт выразим логически

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in [m, M]\ \ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

что доказывает непрерывность функции f^{-1} в точке y_0.

Если y_0 совпадает с m или M, то x_0 совпадает с a или b. Мы повторим предыдущие рассуждения, заменив отрезок $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ на $[a, a + \varepsilon]$ или $[b - \varepsilon, b]$. Теорема 2 доказана.

3. Дифференцируемые функции и производная

В программе средней школы определение дифференцируемой в точке x_0 функции f, определенной в δ-окрестности точки x_0, сводится к существованию производной, которая равна пределу

(1) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Не отвергая этого определения, придадим ему иную форму, пригодную для широких обобщений. Обозначим

(2) $$f'(x_0)=A,\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A=\alpha(x).$$

Функция α определена в δ-окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0. Формула (1) эквивалентна

$$\lim x\to x_0\ \alpha(x)=0.$$

Другими словами, функция α бесконечно мала при $x\to x_0$. Выражая $f(x)$ из (2), найдем

(3) $$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0).$$

Поскольку все проделанные преобразования обратимы, то формулы (1) и (3) равносильны. Таким образом, дадим определение дифференцируемой функции и ее производной в форме, равносильной данному в программе средней школы.

Определение 1. *Пусть функция f определена в δ-окрестности точки x_0. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует число A и бесконечно малая при $x\to x_0$ функция α такие, что справедлива формула*

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0).$$

В этом случае число A называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Произведение $A(x-x_0)$ называется дифференциалом функции f в точке x_0, соответствуюшим приращению $x-x_0$, и обозначается $df(x_0)$.

Дадим различные интепретации свойству дифференцируемости функции и ее производной.

1. Механическое истолкование производной

Если принять, что x - это время, а $f(x)$ - путь, пройденный физическим объектом к моменту x, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

выражает среднюю скорость объекта на временном отрезке от x_0 до x. Тогда производная $f'(x_0)$, равная пределу (1), выражает мгновенную скорость в момент x_0. Во время движения автомобиля водитель снимает показания значения производной, глядя на стрелку спидометра. Механическое истолкование производной требует некоторых ограничений: положительности x, $x-x_0$, $f(x)$, $f(x)-f(x_0)$, или распространения понятия времени, пути и скорости на отрицательные значения.

2. Геометрическое истолкование дифференцируемости функции и ее производной

Проведем прямую (секущую), которая пересекает график функции в точках $M=(x, f(x))$ и $M_0=(x_0, f(x_0))$. Построим прямоугольный треугольник с катетами, параллельными осям координат, и гипотенузой M_0M.

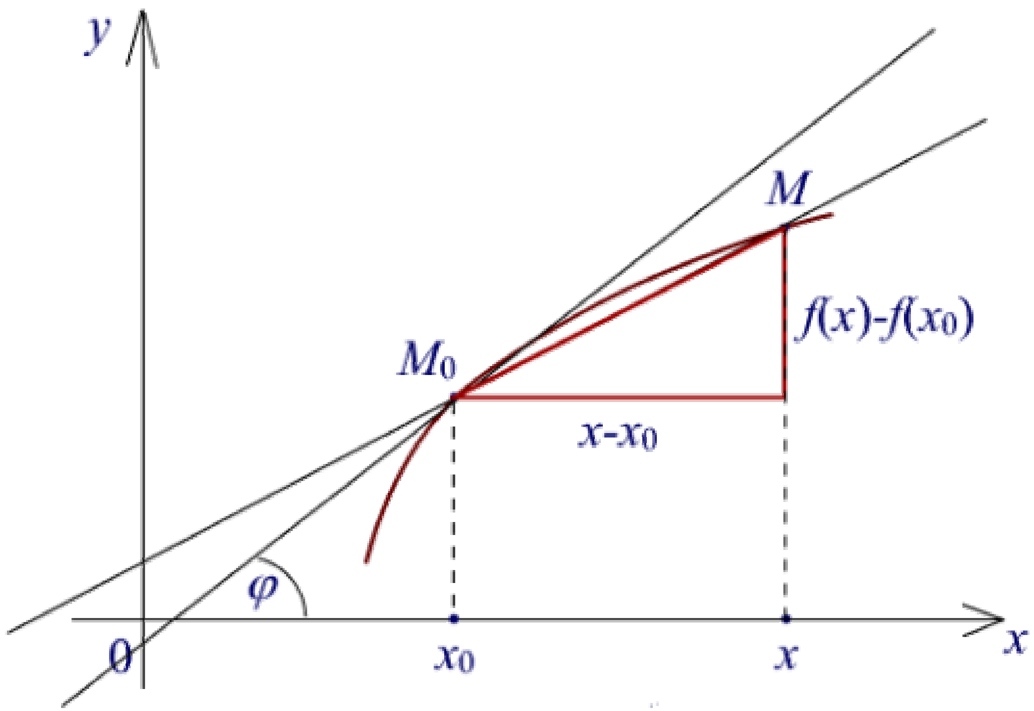


Рис. 5. Иллюстрация геометрического истолкования дифференцируемости функции и ее производной

Отношение

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

выражает тангенс угла, образуемого секущей с положительным направлением оси OX. Если $x\to x_0$, то гипотенуза M_0M вырождается в точку M_0, секущая занимает место касательной, а предел (1) выражает тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси OX. Обратим внимание, что касательная не может быть вертикальной линией, иначе бы тангенс не был определен. Таким образом, интуитивно воспринимая касательную как предельное положение секущей, сформулируем геометрический смысл дифференцируемости функции и ее производной: *функция f дифференцируема в точке* x_0, *если график функции имеет невертикальную касательную в этой точке*; *проиэводная* $f'(x_0)$ *выражает тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси* OX.

3. Аналитическое истолкование дифференцируемости

Обратимся к определению 1 и формуле (3), где правая часть является суммой линейной функции $f(x_0) + A(x - x_0)$ и функции $\alpha(x)(x - x_0)$, которая при $x \to x_0$ убывает быстрее, чем $A(x - x_0)$, если $A \neq 0$. С такой точки зрения дадим аналитическое истолкование дифференцируемости: *функция f дифференцируема в точке x_0, если $f(x)$ приближается линейной функцией $y = f(x_0) + A(x - x_0)$ с погрешностью $\alpha(x)(x - x_0)$, где α - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.* Интуитивно воспринимая линейную приближающую функцию как уравнение касательной, добавим к аналитической интерпретации, что прямая с уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

является касательной к графику функции f в точке x_0.

4. Непрерывность дифференцируемой функции

Выскажем несложно доказуемую, но весьма принципиальную связь между основными понятиями математического анализа: непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке.

Теорема 3. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Дифференцируемость функции в точке x_0 подразумевает, что она определена в некоторой δ-окрестности точки x_0 и существуют число A и бесконечно малая при $x \to x_0$ функция α такие, что справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Второе и третье слагаемые в правой части уравнения стремятся к 0 при $x \to x_0$. Переходя к пределу в обеих частях равенства, получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0),$$

что выражает свойство непрерывности функции f в точке x_0 и заканчивает доказательство теоремы 3.

Пример функции $y = f(x) = |x|$, непрерывной, но не дифференцируемой в точке $x_0 = 0$, доказывает, что утверждение, обратное к теореме 3, неверно.

Лекция 15

1. Арифметические действия над дифференцируемыми функциями

Покажем, что свойство дифференцируемости инвариантно относительно арифметических действий над функциями. Одновременно выведем формулы дифференцирования, известные из программы средней школы.

Теорема 1. *Пусть функции f и g дифферецируемы в точке x_0. Тогда функции $f+g, f-g, fg$ и f/g дифференцируемы в точке x_0 и справедливы формулы*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0);$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

В случае частного предполагаем, что $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Так как функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то существуют числа A и B и бесконечно малые при $x \to x_0$ функции α и β такие, что справедливы формулы

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \tag{1}$$

и

$$g(x) = g(x_0) + B(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0), \tag{2}$$

где $A = f'(x_0)$ и $B = g'(x_0)$.

В теореме 1 содержатся 4 независимых утверждения. Начнем с суммы $f + g$. Сложим равенства (1) и (2) и получим

$$f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (A + B)(x - x_0) + (\alpha(x) + \beta(x))(x - x_0). \tag{3}$$

Заметим, что благодаря определению Гейне предела функции бесконечно малые функции обладают теми же свойствами, что и бесконечно малые последовательности:

сумма двух бесконечно малых является бесконечно малой;

произведение бесконечно малой и ограниченной является бесконечно малой.

Так как $A + B$ - число, а $\alpha + \beta$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, то равенство (3) определяет $f + g$ как дифференцируемую в точке x_0 функцию, причем $(f + g)'(x_0) = A + B = f'(x_0) + g'(x_0)$, что доказывает первую часть теоремы 1.

Аналогично вычтем равенство (2) из (1) и получим

$$f(x) - g(x) = f(x_0) - g(x_0) + (A - B)(x - x_0) + (\alpha(x) - \beta(x))(x - x_0). \tag{4}$$

Так как $A - B$ - число, $(-1)\beta$ бесконечно мала, а поэтому и $\alpha - \beta$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, то равенство (4) определяет $f - g$ как дифференцируемую в точке x_0 функцию, причем $(f - g)'(x_0) = A - B = f'(x_0) - g'(x_0)$, что доказывает вторую часть теоремы 1.

Аналогично перемножим равенства (1) и (2) и получим

(5)
$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (Ag(x_0) + Bf(x_0)) +$$

$$[f(x_0)\beta(x) + g(x_0)\alpha(x) + (AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x))(x - x_0)](x - x_0).$$

Обозначим

$$\gamma(x) = f(x_0)\beta(x) + g(x_0)\alpha(x) + (AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x))(x - x_0).$$

Каждое слагаемое в сумме $\gamma(x)$ стремится к 0 при $x \to x_0$, поэтому γ - бесконечно малая при $x \to x_0$ функция. Так как $Ag(x_0) + Bf(x_0)$ - число, то равенство (5) определяет fg как дифференцируемую в точке x_0 функцию, причем

$$(fg)'(x_0) = Ag(x_0) + Bf(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0),$$

что доказывает третью часть теоремы 1.

Наконец, разделим равенство (1) на (2) и получим

(6)
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)}{g(x_0) + B(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)} =$$

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} + \frac{f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)}{g(x_0) + B(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} =$$

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} + \frac{Ag(x_0) + \alpha(x)g(x_0) - Bf(x_0) - \beta(x)f(x_0)}{g(x_0)(g(x_0) + B(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0))}(x - x_0) =$$

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)}+\frac{Ag(x_0)-Bf(x_0)}{g^2(x_0)}(x-x_0)+$$

$$\left[\frac{Ag(x_0)+\alpha(x)g(x_0)-Bf(x_0)-\beta(x)f(x_0)}{g(x_0)(g(x_0)+B(x-x_0)+\beta(x)(x-x_0))}-\frac{Ag(x_0)-Bf(x_0)}{g^2(x_0)}\right](x-x_0).$$

Обозначим

$$\gamma(x)=\frac{Ag(x_0)+\alpha(x)g(x_0)-Bf(x_0)-\beta(x)f(x_0)}{g(x_0)(g(x_0)+B(x-x_0)+\beta(x)(x-x_0))}-\frac{Ag(x_0)-Bf(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Непосредственными арифметическими действиями проверяем, что

$$\lim_{x\to x_0}\gamma(x)=0,$$

то есть функция γ бесконечно мала при $x\to x_0$. Так как

$$\frac{Ag(x_0)-Bf(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- число, то равенство (6) определяет f/g как дифференцируемую в точке x_0 функцию, причем

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{Ag(x_0)-Bf(x_0)}{g^2(x_0)}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)},$$

что доказывает четвертую часть теоремы 1 и завершает ее доказательство.

2. Дифференцируемость сложной функции

Покажем, что помимо арифметических действий, свойство дифференцируемости функции инвариантно относительно композиции, и выведем формулу производной сложной функции.

Теорема 2. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0, $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула*

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство. Существование сложной функции при условиях теоремы 2 мы обсудили ранее в доказательстве теоремы о непрерывности сложной функции. Рассуждения сохраняют силу, так как обе функции f и g непрерывны в точке x_0.

Так как функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке y_0, то существуют числа A и B и бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $\alpha = \alpha(x)$ и бесконечно малая при $y \to y_0$ функция $\beta = \beta(y)$ такие, что справедливы формулы

(1) $$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

и

(7) $$g(y) = g(y_0) + B(y - y_0) + \beta(y)(y - y_0),$$

где $A = f'(x_0)$ и $B = g'(y_0)$.

Полагая $y = f(x)$, подставим выражение (1) в равенство (7) и получим

(8) $$g(f(x)) = g(f(x_0)) + B(A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)) + \beta(f(x))(A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)).$$

Строго говоря, функция $z = \beta(f(x))$ не вполне определена, поскольку функция $z = \beta(y)$ не определена в точке y_0. Исправим этот недостаток, положив

$$\beta(y_0) = 0.$$

При таком доопределении функция $z = \beta(y)$ становится непрерывной в точке y_0, так как $\lim_{y \to y_0}\beta(y) = 0 = \beta(y_0)$.

Более того, сложная функция $z = \beta(f(x))$ непрерывна и бесконечно мала в точке x_0 как композиция непрерывной и бесконечно малой в точке y_0 функции $z = \beta(y)$ и непрерывной и бесконечно малой в точке x_0 функции $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$.

Обозначим

$$\gamma(x) = B\alpha(x) + \beta(f(x))(A + \alpha(x))$$

и перепишем равенство (8) в форме

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + BA(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что $\lim_{x\to x_0}\gamma(x) = 0$, то есть функция γ бесконечно мала при $x\to x_0$. Так как BA - число, то последнее равенство определяет композицию $g^\circ f$ как дифференцируемую в точке x_0 функцию, причем

$$(g(f))'(x_0) = BA = g'(y_0)f'(x_0),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

3. Производная обратной функции

Выведем формулу производной обратной функции при условии, что обратная функция существует.

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) \neq 0$, и имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда обратная функция дифференцируема в точке y_0, $y_0 = f(x_0)$, и справедлива формула*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Функция f определена в δ-окрестности точки x_0. Обозначим эту окрестность через X, а ее образ при отображении f - через Y. По доказанной в лекции 14 теореме функция f^{-1} непрерывна в точке y_0.

Воспользуемся формулой

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Подставим сюда $x = f^{-1}(y)$ и заметим, что благодаря непрерывности функций $y = f(x)$ в точке x_0 и $x = f^{-1}(y)$ в точке y_0 условие $x\to x_0$ эквивалентно условию $y\to y_0$

$$f'(x_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}.$$

Но это равенство можно интерпретировать как существование предела

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

что устанавливает дифференцируемость обратной функции f^{-1} и требуемую формулу и заканчивает доказательство теоремы 3.

4. Локальный экстремум. Теорема Ферма

Дадим определение локального экстремума.

Определение 1. *Говорят, что функция f имеет в точке x_0 локальный минимум, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство*

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Аналогично функция f имеет в точке x_0 локальный максимум, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум, если она имеет в этой точке локальный минимум или локальный максимум.

Докажем замечательную теорему Ферма, выражающую необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции.

Теорема 4. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум. Тогда справедливо равенство*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что функция f, дифференцируемая в точке x_0, имеет в этой точке локальный максимум. В случае локального минимума рассуждения симметричны. Воспользуемся формулой

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Коль скоро предел написанного отношения существует, то существуют и равные ему односторонние пределы

(9) $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если $x_0 - \delta < x < x_0$, то $f(x) - f(x_0) \le 0$ и $x - x_0 < 0$. Следовательно, для таких x

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

и поэтому

(10) $$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0.$$

Аналогично, если $x_0 < x < x_0 + \delta$, то $f(x) - f(x_0) \le 0$ и $x - x_0 > 0$. Следовательно, для таких x

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

и поэтому

(11) $$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

Формулы (9), (10) и (11) вместе приводят к заключению о равенстве

$$f'(x_0) = 0$$

и доказывают теорему 4.

Теорема 4 предлагает первый шаг в алгоритме решения задачи о поиске локального экстремума дифференцируемой функции. Согласно этой теореме первый отбор состоит в решении уравнения

$$f'(x) = 0.$$

Точки локального экстремума могут находиться только среди корней этого уравнения, которые называются *критическими точками функции* f.

Теорема 4 имеет ясную геометрическую интерпретацию: график дифференцируемой функции в точке x_0 локального экстремума имеет касательную, параллельную оси OX.

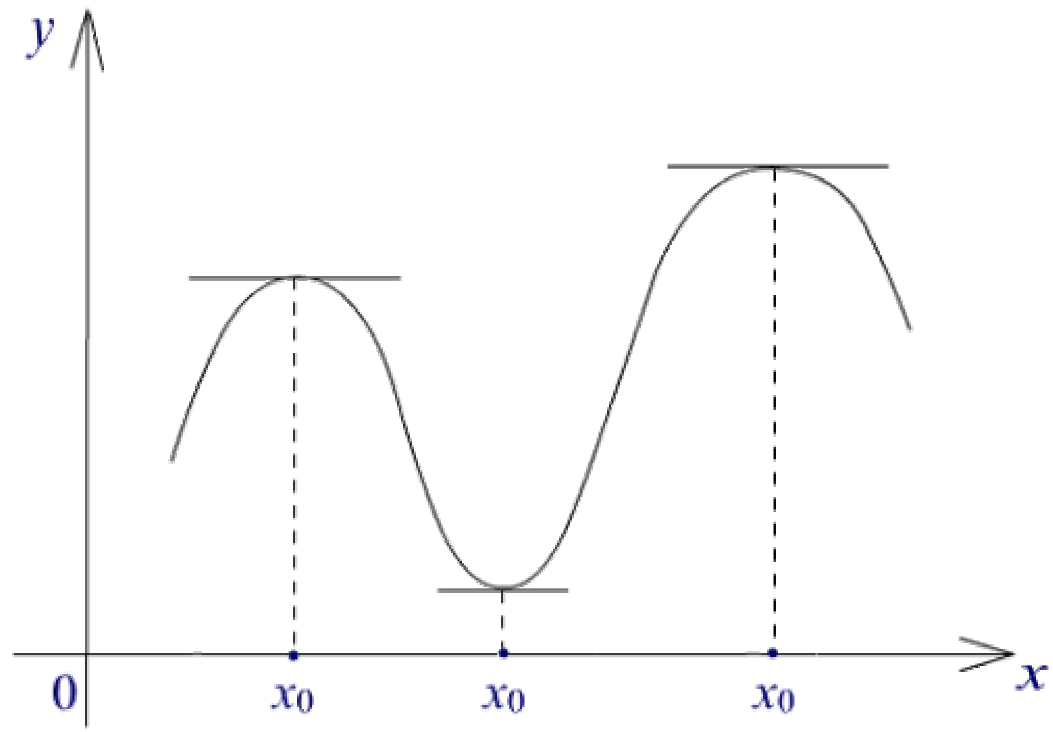


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация теоремы Ферма.

Пример функции $y = f(x) = x^3$ показывает, что не все критические точки непременно становятся точками локального экстремума. Действительно, уравнение

$$(x^3)' = 3x^2 = 0$$

имеет единственный корень $x = 0$, но очевидно, что кубическая функция строго монотонна и потому не имеет локального экстремума ни в какой точке.

Лекция 16

1. Теорема Ролля о среднем значении

Начнем с естественного определения.

Определение 1. *Функция f называется дифференцируемой на множестве X, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.*

Следующая теорема, принадлежащая Роллю, имеет ясный геометрический смысл, сходный с истолкованием теоремы Ферма.

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям*:

1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2. *дифференцируема на интервале* (a, b);

3. $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

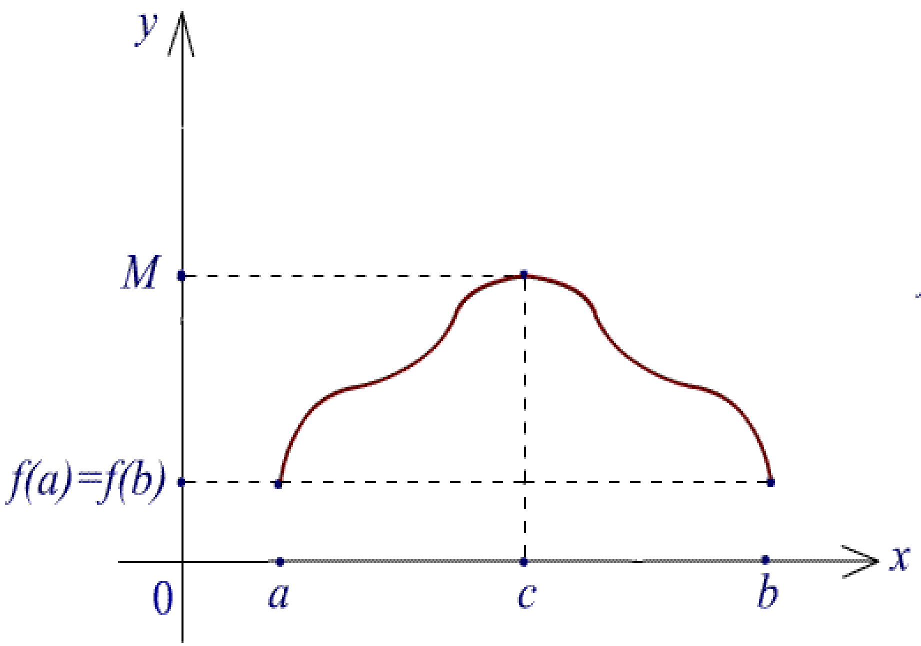
Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает своего минимума и максимума. Обозначим

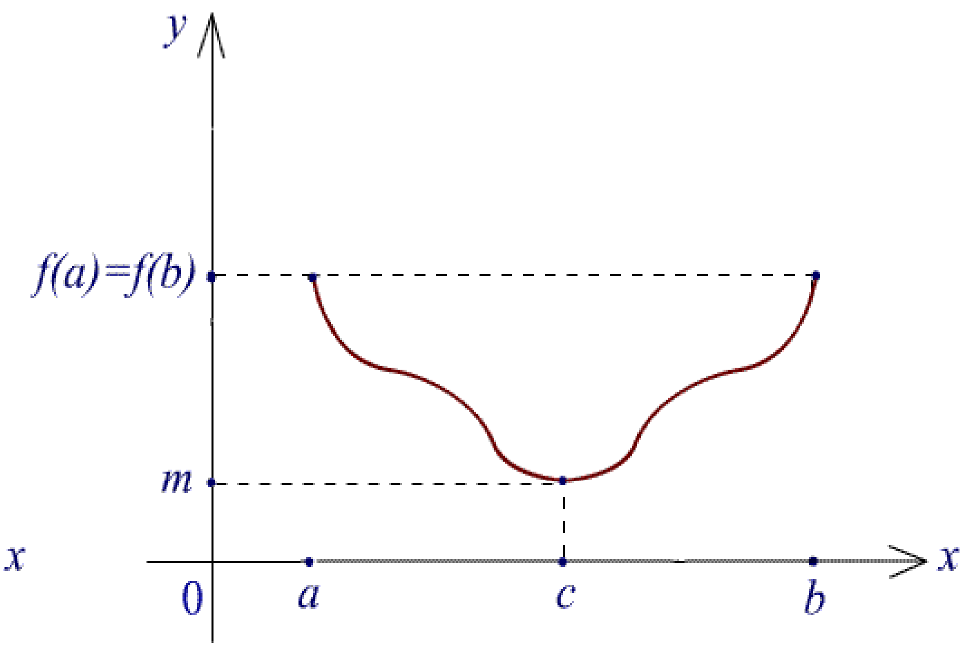
$$m = \min x \in [a, b]\, f(x), \qquad M = \max x \in [a, b]\, f(x).$$

Существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = m$ и $f(x_2) = M$.

Если $m = \mathrm{M}$, то $f(x) = m = M$ для всех $x \in [a, b]$. Значит, f принимает постоянное значение на $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ на $[a, b]$, что согласуется с утверждением теоремы 1.

Если $m < M$, то ввиду равенства $f(a) = f(b)$ по крайней мере одна из точек x_1 или x_2 находится внутри (a, b).


y
M
f(a)=f(b)
0
a
c
b
x


y
f(a)=f(b)
m
0
a
c
b
x

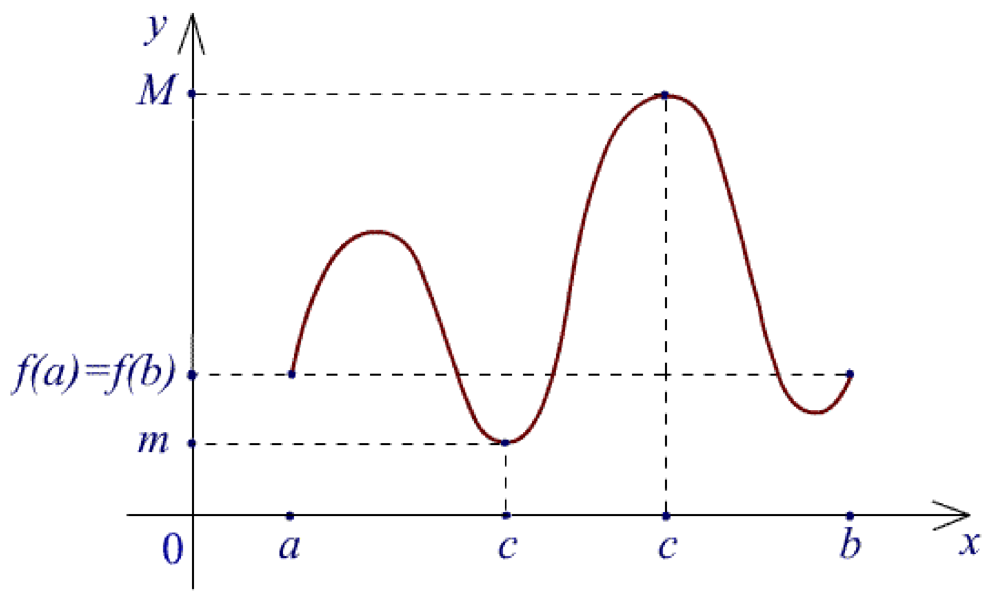


Рис. 1. Возможные сценарии поведения функции f.

Обозначим через с ту из точек x_1 или x_2, которая окажется внутри (a, b). Поскольку функция f дифференцируема в точке c и имеет в ней экстремум, то по теореме Ферма $f'(c) = 0$, что доказывает теорему 1.

2. Теорема Лагранжа о среднем значении

Обобщением теоремы Ролля служит следующая теорема Лагранжа.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям*:

1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2. *дифференцируема на интервале* (a, b).

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ *такая, что справедлива формула*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Составим функцию

$$g(x) = f(x) - \lambda x, \qquad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функция g как сумма функции f и линейной функции обладает свойствами:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2. дифференцируема на интервале (a, b);

3. $g(a) = g(b)$, что легко проверяется прямой подстановкой

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b - a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a},$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b - a} = \frac{-f(b)a + f(a)b}{b - a}.$$

Таким образом, функция g удовлетворяет условиям теоремы Ролля, согласно которой существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $g'(c) = 0$, то есть

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

что доказывает теорему 2.

Теорема 2 имеет интересное геометрическое истолкование. Отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

выражает тангенс угла, образованного хордой, соединяющей крайние точки $a = (a, f(a))$ и $b = (b, f(b))$ графика функции f, и осью OX, в то время как $f'(c)$ равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции f в точке x_0 к положительному направлению оси OX. В теореме 2 утверждается существование точки c, в которой касательная к графику функции параллельна хорде, соединяющей крайние точки A и B графика.

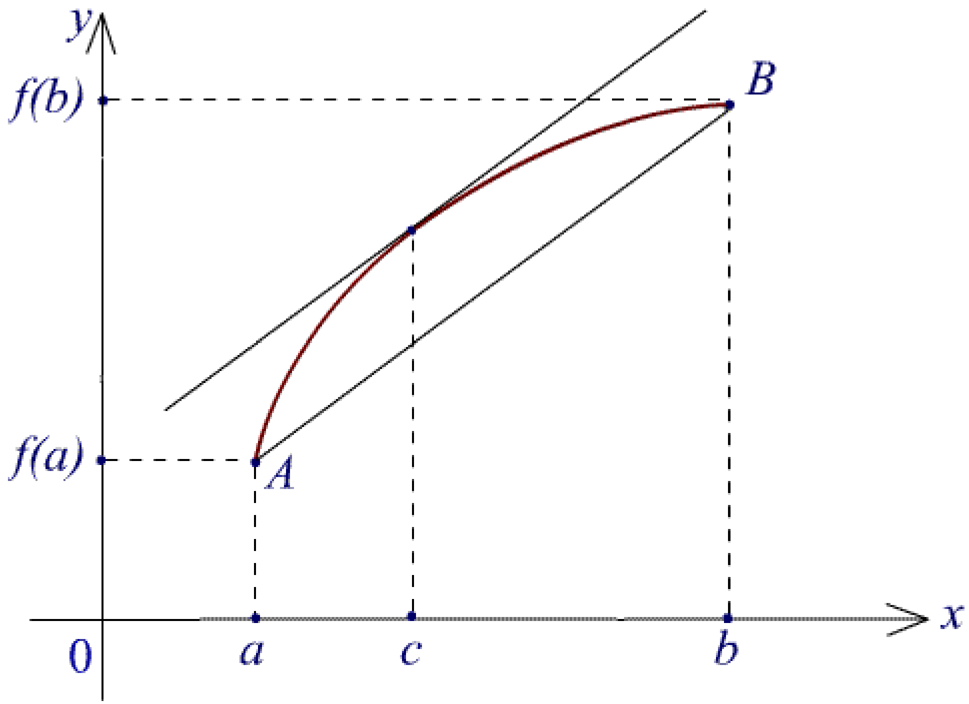


Рис. 2. Геометрическая иллюстрация теоремы Лагранжа.

3. Теорема Коши о среднем значении

Дальнейшее обобщение теорем Ролля и Лагранжа дает следующая теорема Коши.

Теорема 3. *Пусть функции f и g удовлетворяют условиям*:

1. *непрерывны на отрезке* $[a, b]$;

2. *дифференцируемы на интервале* (a, b);

3. $g(a) \neq g(b)$ *и* $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ *такая, что справедлива формула*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство. Составим функцию

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x), \qquad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функция h как линейная комбинация функций f и g обладает свойствами:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2. дифференцируема на интервале (a, b);

3. $h(a) = h(b)$, что легко проверяется прямой подстановкой

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} =$$

$$= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)},$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} =$$

$$= \frac{-f(b)g(a) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)}$$

Таким образом, функция h удовлетворяет условиям теоремы Ролля, согласно которой существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $h'(c) = 0$, то есть

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

что доказывает теорему 3.

4. Правило Лопиталя для отношения бесконечно малых

Следующие теоремы, известные под названием правила Лопиталя для отношения бесконечно малых или бесконечно больших функций, предлагают эффективный метод отыскания предела функции при помощи средств дифференциального исчисления. Метод не является всеобщим или универсальным, но приводит к быстрому достижению цели во многих задачах. Начнем с задачи о пределе отношения бесконечно малых.

Теорема 4. *Пусть функции f и g удовлетворяют условиям*:

1. *дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0*;

2. $\lim x \to x_0 f(x) = \lim x \to x_0 g(x) = 0$;

3. $g'(x) \neq 0$, *если* $0 < |x - x_0| < \delta$, *и существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

который равен l.

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке x_0, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$. При таком доопределении окажется, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 0.$$

Следовательно, обе доопределенные функции f и g стали непрерывными в точке x_0.

Пусть $x > x_0$, $|x - x_0| < \delta$. функции f и g непрерывны на отрезке $[x_0, x]$ и дифференцируемы в его внутренних точках. Применяя к функции g теорему Лагранжа, найдем точку $c \in (x_0, x)$ такую, что

$$g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(c)(x - x_0).$$

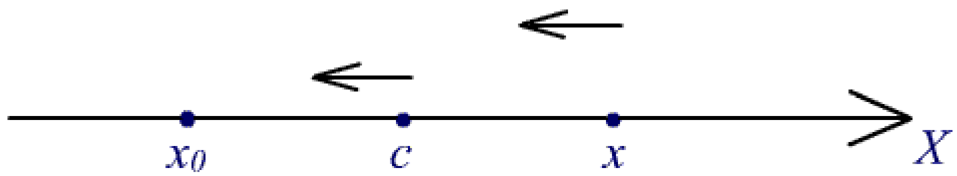


Рис. 3. Иллюстрация к теореме о правиле Лопиталя для отношения бесконечно малых.

Поскольку $g'(c) \neq 0$, то и $g(x) \neq 0$.

Теперь согласно теореме Коши, примененной к f и g, найдется точка $c \in (x_0, x)$ такая, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Если $x\to x_0$, то тем более $c\to x_0$, поэтому существует правосторонний предел левой части последнего равенства, а следовательно, и правой части и справедлива формула

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to x_0+0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = l.$$

Симметричными рассуждениями покажем, что

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

что заканчивает доказательство теоремы 4.

Несмотря на привлекательность и простоту правила Лопиталя, хотелось бы предостеречь от желания применить его в двух фундаментальных примерах

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

Оба предела по существу определяют значения производных функций $y = \sin x$ и $y = \log(1 + x)$ в точке 0. Это глубокие результаты, они могут быть получены при помощи тонких рассуждений. Попытка упростить трудный подход, подменив его правилом Лопиталя, приведет к логическому порочному кругу: знание производных основано на знании пределов, а знание пределов основано на правиле Лопиталя, использующем значения производных.

5. Правило Лопиталя для отношения бесконечно больших

Выведем аналогичное правило Лопиталя для отношения бесконечно больших.

Теорема 5. *Пусть функции f и g удовлетворяют условиям*:

1. *дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0*;

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$;

3. $g'(x) \neq 0$, *если* $0 < |x - x_0| < \delta$, *и существует предел*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

который равен l.

Доказательство. Так как $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$, если x находится достаточно близко к x_0. Будем считать эти условия выполненными за счет выбора достаточно малого $\delta > 0$.

Запишем по определению предела функции

(1) $$\forall\varepsilon>0\exists\delta_1>0\forall x\neq x_0 \left|x-x_0\right|<\delta_1 \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon,$$

откуда, в частности, следует неравенство

(2) $$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|=\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l+l\right|\leq\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|+\left|l\right|<\varepsilon+\left|l\right|.$$

Пусть $x_1 > x_0$, $|x_1 - x_0| < \delta_1$. Выберем точку $x \in (x_0, x_1)$.

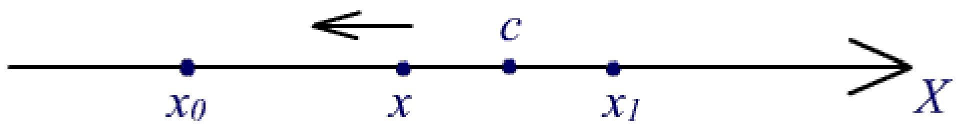


Рис. 4. Иллюстрация к теореме о правиле Лопиталя для отношения бесконечно больших.

Функции f и g дифференцируемы на отрезке $[x, x_1]$. Так как $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то $f(x) \neq f(x_1)$ и $g(x) \neq g(x_1)$ при фиксированном x_1 и при x, находящихся достаточно близко к x_0. Будем считать эти условия также выполненными за счет выбора достаточно малого $\delta_1 > 0$.

Теперь согласно теореме Коши, примененной к функциям f и g на отрезке $[x, x_1]$, найдется точка $c \in (x, x_1)$ такая, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)}.$$

Преобразуем эту формулу к виду

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)\dfrac{f(x_1)}{f(x)} - 1}{g(x)\dfrac{g(x_1)}{g(x)} - 1}.$$

Разрешим это равенство относительно $f(x)/g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)\dfrac{g(x_1)}{g(x)} - 1}{g'(c)\dfrac{f(x_1)}{f(x)} - 1}.$$

Вычтем l из обеих частей равенства и проведем тождественные преобразования

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left[\frac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)} - 1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)} - 1} - 1\right] + \frac{f'(c)}{g'(c)} - l.$$

Отсюда получим оценки модуля

(3) $$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\left|\frac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)} - 1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)} - 1} - 1\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right|.$$

Зафиксируем x_1 и устремим x к x_0. Тогда отношения $(f(x_1))/f(x)$ и $(g(x_1))/g(x)$ бесконечно малы и поэтому значение функции

$$\left|\frac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}-1\right|$$

стремится к 0 при $x \to x_0$. Значит, существует $\delta_2 > 0$ такое, что для всех x, $x_0 < x < x_0+\delta_2$, справедливо неравенство

(4)
$$\left|\frac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}-1\right| < \varepsilon.$$

Собираем вместе неравенства (1), (2) и (4) и применяем их в неравенстве (3) и, полагая $\delta^* = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta^* > 0 \forall x, \quad x_0 < x < x_0 + \delta^* \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon(\varepsilon + |l| + 1),$$

что выражается условием

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Симметричными рассуждениями покажем, что

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

что заканчивает доказательство теоремы 5.

Обе теоремы 4 и 5 справедливы и в случае, когда $x_0 = -\infty$ или $x_0 = \infty$. Доказательства слегка подправляются в соответствии с появившимися изменениями в толковании точки x_0 как бесконечно удаленной точки.

Правило Лопиталя позволяет в случае успешного применения заменить поиск предела отношения бесконечно малых или бесконечно больших поиском предела отношения их производных.

Лекция 17

1. Критерий монотонности функции

Покажем, какие средства предоставляет дифференциальное исчисление для установления монотонности функции на интервале.

Теорема 1. *Пусть функция f дифференцируема на интервале* (a, b). *Функция f не убывает на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $f'(x) \geq 0$ *на* (a, b). *Функция f не возрастает на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $f'(x) \leq 0$ *на* (a, b).

Доказательство. Проведем доказательство для неубывающей функции f, а для невозрастающей функции рассуждения симметричны.

Начнем с необходимости условия. Пусть функция f не убывает на (a, b). Выберем произвольно точку $x_0 \in (a, b)$ и найдем производную

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пусть $x > x_0$. Тогда $x - x_0 > 0$ и $f(x) - f(x_0) \geq 0$ благодаря тому, что функция f не убывает. Следовательно,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

и поэтому

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

Поскольку x_0 - произвольная точка из (a, b), то $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Теперь докажем достаточность условия. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a, b). Выберем произвольно точки $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Функция f дифференцируема на $[x_1, x_2]$. Применим теорему Лагранжа к f на $[x_1, x_2]$, согласно которой найдется точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, что означает неубывание функции f на (a, b) и заканчивает доказательство теоремы 1.

2. Производные высших порядков

Дадим индуктивное определение производных второго и произвольного порядков.

Определение 1. *Пусть в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция f имеет производную f', которая, в свою очередь, является функцией, дифференцируемой в точке x_0. Тогда функция f называется дважды дифференцируемой в точке x_0 и*

$$(f')'(x_0)$$

называется производной второго порядка функции f в точке x_0 и обозначается

$$f''(x_0).$$

Предположим, что в δ-окрестности точки x_0 функция f имеет производную $f^{(k-1)}$, которая, в свою очередь, является функцией, дифференцируемой в точке x_0. Тогда функция f называется k раз дифференцируемой в точке x_0 и

$$(f^{(k-1)})'(x_0)$$

называется производной порядка k функции f в точке x_0 и обозначается

$$f^{(k)}(x_0).$$

Таким образом, $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0)$.

3. Формула Тейлора с остатком Пеано

Согласно определению дифференцируемой в точке x_0 функции f ее можно приблизить линейной функцией с погрешностью более высокого порядка малости при $x \to x_0$. Понятие производных высших порядков обобщает это определение, заменив линейную функцию на многочлен степени, равной порядку дифференцируемости. Воплощение такого подхода содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема n раз в точке x_0. Тогда существует бесконечно малая при $x \to x_0$ функция α такая, что справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n.$$

Многочлен степени не выше n

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

называется многочленом Тейлора, а погрешность

$$\alpha(x)(x - x_0)^n$$

приближения функции f многочленом Тейлора называется остатком Пеано. Теорема 2 представляет формулу Тейлора с остатком Пеано.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для $n = 1$ утверждение теоремы 2 и формула Тейлора превращаются в определение дифференцируемой в точке x_0 функции и поэтому справедливы.

Предположим, что утверждение теоремы 2 и формула Тейлора справедливы для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и докажем их для $k = n$.

Обозначим

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Смысл теоремы 2 состоит в том, что $R_n(x) = \alpha(x)(x - x_0)^n$. Будем доказывать это соотношение.

Прежде всего заметим, что всякий многочлен является сколько угодно раз дифференцируемой функцией в любой точке. Поэтому функция R_n дифференцируема n раз в точке x_0. Найдем производную R_n' в произвольной точке дифференцируемости R_n

(1) $$R'(x) = f'(x) - T_n'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} =$$

$$f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

С другой стороны, коль скоро функция f дифференцируема n раз в точке x_0, то ее производная f' дифференцируема $(n - 1)$ раз в точке x_0. Согласно гипотезе индукции для f' справедлива формула Тейлора с многочленом Тейлора порядка $(n - 1)$. Значит, существует бесконечно малая при $x \to x_0$ функция β такая, что справедлива формула

(2) $$f'(x) = f'(x_0) + (f')'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{(f')^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \beta(x)(x - x_0)^{n-1} =$$

$$f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{(f)^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \beta(x)(x - x_0)^{n-1}.$$

Сравнивая формулы (1) и (2), приходим к выводу, что

(3) $$R_n'(x) = \beta(x)(x - x_0)^{n-1}.$$

Обратим внимание, что $R_n(x_0) = f(x_0) - T_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$. Выберем произвольно точку x из δ-окрестности точки x_0, где R_n дифференцируема, и применим к R_n теорему Лагранжа на отрезке с концевыми точками x и x_0, согласно которой между x и x_0 найдется точка c такая, что справедлива формула

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(x_0) = R_n{}'(c)(x - x_0).$$

Эта формула вместе с (3) дает равенство

$$R_n(x) = \beta(c)(c - x_0)^{n-1}(x - x_0).$$

Очевидно, что

$$\frac{|c - x_0|}{|x - x_0|} < 1$$

и если x стремится к x_0, то и промежуточная точка c стремится к x_0. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(c)(c-x_0)^{n-1}(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \beta(c)\frac{(c-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что функция

$$\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

является бесконечно малой при $x \to x_0$, что заканчивает доказательство теоремы 2.

4. Формула Тейлора с остатком Лагранжа

Если на функцию f наложить условия более жесткие, чем в теореме 2, то и информация о погрешности приближения функции ее многочленом Тейлора будет богаче.

Теорема 3. *Пусть функция f дифференцируема $(n + 1)$ раз в δ-окрестности точки x_0. Тогда для всякой точки x из δ-окрестности точки x_0 найдется точка c, находящаяся между x и x_0, такая, что справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Как и прежде, многочлен T_n в правой части формулы в теореме 3 *называется многочленом Тейлора, а погрешность*

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

приближения функции f многочленом Тейлора называется остатком Лагранжа. Теорема 3 представляет формулу Тейлора с остатком Лагранжа.

Доказательство. Обозначим

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Смысл теоремы 3 состоит в том, что $R_n(x)$ равен остатку Лагранжа. Заметим, что функция R_n дифференцируема $(n + 1)$ раз в δ-окрестности точки x_0, $R_n(x_0) = 0$. Для доказательства выберем произвольно точку x из δ-окрестности точки x_0 и на отрезке с концевыми точками x и x_0 применим теорему Коши к паре функций $F_1 = R_n$ и G_1, где $G_1(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Обе функции диференцируемы на рассматриваемом отрезке, $G_1(x_0) = 0$, $G_1(x) \neq 0$ и $G_1'(x) \neq 0$, если $x \neq x_0$. Согласно теореме Коши между x и x_0 найдется точка c_1 такая, что справедлива формула

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F_1(x)}{G_1(x)} = \frac{F_1(x)-F_1(x_0)}{G_1(x)-G_1(x_0)} = \frac{F_1'(c_1)}{G_1'(c_1)} = \frac{f'(c_1)-T_n'(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n}.$$

Снова на отрезке с концевыми точками c_1 и x_0 применим теорему Коши к паре функций $F_2 = F_1'$ и $G_2 = G_1'$. Обе функции дифференцируемы на рассматриваемом отрезке, $F_2(x_0) = f'(x_0) - T_n'(x_0) = 0$, $G_2(x_0) = 0$, $G_2(x) \neq 0$ и $G_2'(x) \neq 0$, если $x \neq x_0$. Согласно теореме Коши между c_1 и x_0 найдется точка c_2 такая, что справедлива формула

$$\frac{F_2(c_1)}{G_2(c_1)} = \frac{F_2(c_1)-F_2(x_0)}{G_2(c_1)-G_2(x_0)} = \frac{F_2'(c_2)}{G_2'(c_2)} = \frac{f''(c_2)-T_n''(c_2)}{(n+1)n(c_2-x_0)^{n-1}}.$$

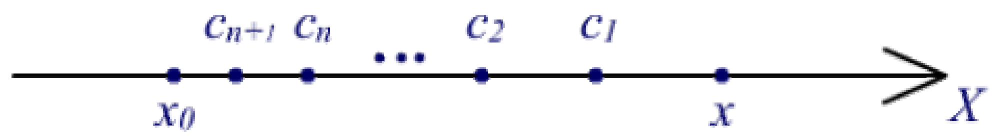


Рис. 1. Иллюстрация к доказательству теоремы о формуле Тейлора с остатком Лагранжа

И так далее. На n-м шаге на отрезке с концевыми точками c_{n-1} и x_0 применим теорему Коши к паре функций $F_n = F_1^{(n-1)}$ и $G_n = G_1^{(n-1)}$. Обе функции дифференцируемы на рассматриваемом отрезке, $F_n(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) - T_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, $G_n(x_0) = 0$, $G_n(x) \neq 0$ и $G_n'(x) \neq 0$, если $x \neq x_0$. Согласно теореме Коши между c_{n-1} и x_0 найдется точка c_n такая, что справедлива формула

$$\frac{F_n(c_{n-1})}{G_n(c_{n-1})} = \frac{F_n(c_{n-1}) - F_n(x_0)}{G_n(c_{n-1}) - G_n(x_0)} = \frac{F_n'(c_n)}{G_n'(c_n)} = \frac{f^{(n)}(c_n) - T_n^{(n)}(c_n)}{(n+1)n \ldots 2(c_n - x_0)}.$$

На последнем шаге на отрезке с концевыми точками c_n и x_0 применим теорему Лагранжа к функции $F_{n+1} = F_1^{(n)}$. Эта функция дифференцируема на рассматриваемом отрезке, $F_{n+1}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - T_n^{(n)}(x_0) = 0$. Согласно теореме Лагранжа между c_n и x_0 найдется точка c_{n+1} такая, что справедлива формула

$$\frac{F_{n+1}(c_n)}{G_{n+1}(c_n)} = \frac{F_{n+1}(c_n) - F_{n+1}(x_0)}{(n+1)!(c_n - x_0)} = \frac{F_{n+1}'(c_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

в которой мы учли, что $(n + 1)$-я производная $T_n^{(n+1)}(x)$ многочлена степени не выше n тождественно обращается в нуль.

Возвращаясь к началу цепочки равенств и начальным обозначениям, убеждаемся, что

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

где $c = c_{n+1}$, что соответствует сформулированному виду погрешности приближения функции f многочленом Тейлора и заканчивает доказательство теоремы 3.

5. Достаточное условие экстремума функции

Теорема Ферма дает необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, которое накладывает требование на значение производной первого порядка. Привлечение к исследованию производных высших поряков дает достаточное условие экстремума.

Теорема 4. *Пусть функция f дважды дифференцируема в точке x_0 и удовлетворяет условиям*:

$f'(x_0) = 0$;

$f''(x_0) \neq 0$.

Тогда функция f имеет в точке x_0 локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$, или имеет локальный максимум в точке x_0, если $f''(x_0) < 0$.

Доказательство. Так как функция f дважды дифференцируема в точке x_0, то к ней применима формула Тейлора с остатком Пеано, согласно которой существует бесконечно малая при $x \to x_0$ функция α такая, что справедлива формула

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x)(x - x_0)^2.$$

Учитывая условие $f'(x_0) = 0$ теоремы, запишем оставшуюся часть формулы

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x)(x - x_0)^2 = \left[\frac{f''(x_0)}{2} + \alpha(x)\right](x - x_0)^2.$$

Рассмотрим случай $f''(x_0) > 0$. В случае $f''(x_0) < 0$ рассуждения симметричны. Запишем определение бесконечной малости функции α

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

и положим $\varepsilon = f''(x_0)/2 > 0$. Тогда для всех $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$-\frac{f''(x_0)}{2} < \alpha(x),$$

которое вместе с предыдущим неравенством приводят к выводу, что для таких x

$$f(x) - f(x_0) > 0,$$

что означает минимальность значения $f(x_0)$ среди остальных значений $f(x)$ в δ-окрестности точки x_0 и заканчивает доказательство теоремы 4.

Лекция 18

1. Выпуклые множества

Дадим геометрическое определение выпуклого множества на плоскости.

Определение 1. *Множество $X \subset R^2$ называется выпуклым, если отрезок, соединяющий произвольные точки $M_1 \in X$ и $M_2 \in X$, целиком содержится в X.*

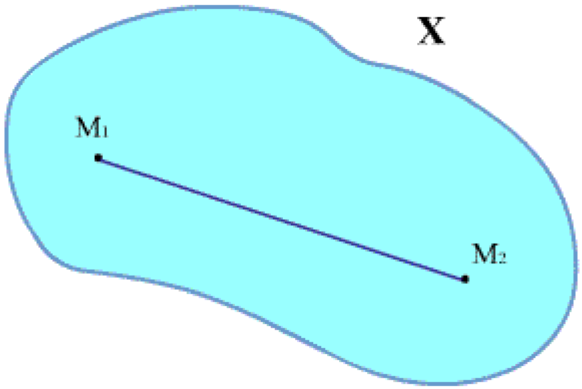


Рис. 1. Пример выпуклого множества

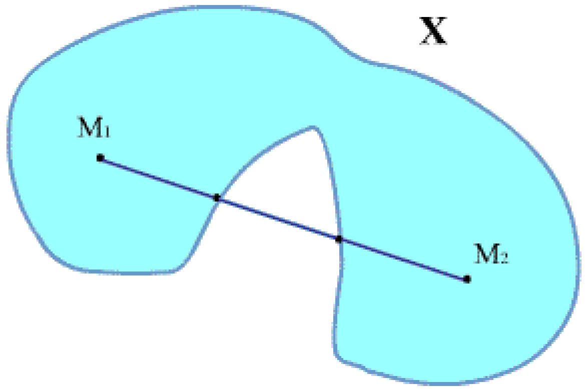


Рис. 2. Пример невыпуклого множества

Как известно из курса аналитической геометрии, всякая прямая на плоскости задается линейным уравнением. То же относится к отрезкам на прямой.

Обозначим через $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ радиус-векторы $\overline{OM}_1$ и $\overline{OM}_2$, соединяющие начало координат с точками M_1 и M_2, рассмотрим векторное линейное уравнение в параметрическом виде

(1) $$\bar{r} = \overline{OM} = \lambda r_1 + (1-\lambda) r_2, \qquad 0 \le \lambda \le 1.$$

Если $\lambda = 0$, то $M = M_2$, а если $\lambda = 1$, то $M = M_1$. Когда λ пробегает значения от 0 до 1, точка M пробегает все точки отрезка M_1M_2 от M_2 до M_1.

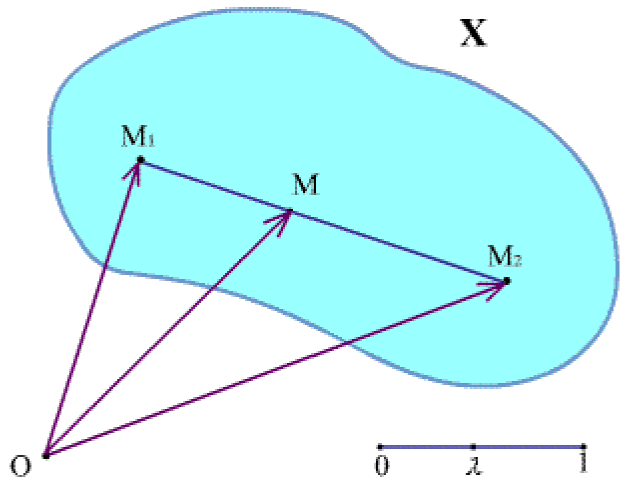


Рис. 3. Иллюстрация задания отрезка внутри множества линейным уравнением

Векторное линейное уравнение (1) можно записать в координатах. Пусть $\overline{OM}_1, \overline{OM}_2$ и $\overline{OM}$ имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x, y). Тогда векторное уравнение (1) эквивалентно системе двух координатных уравнений в параметрическом виде

(2) $$\begin{cases} x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \\ y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2, \end{cases}$$

$$0 \le \lambda \le 1.$$

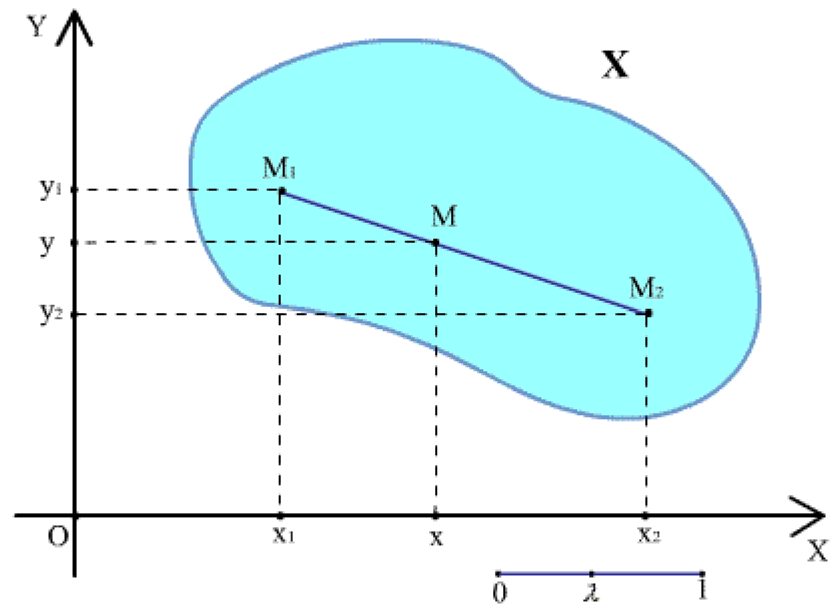


Рис. 4. Иллюстрация задания отрезка внутри множества в параметрическом виде

2. Выпуклые функции

Применим геометрическое определение выпуклого множества к функциям на отрезке, используя понятие графика и выпуклости множества, расположенного выше графика. Сначала формально определим понятие графика функции.

Определение 2. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на отрезке* $[a, b]$. *Тогда множество* $\{(x, y)\colon a \le x \le b, y = f(x)\}$ *точек на плоскости называется графиком функции* $y = f(x)$ *на* $[a, b]$.

Теперь определим множество, расположенное выше графика функции.

Определение 3. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на отрезке* $[a, b]$. *Тогда множество* $\{(x, y)\colon a \le x \le b, y \ge f(x)\}$ *точек на плоскости называется надграфиком функции* $y = f(x)$ *на* $[a, b]$.

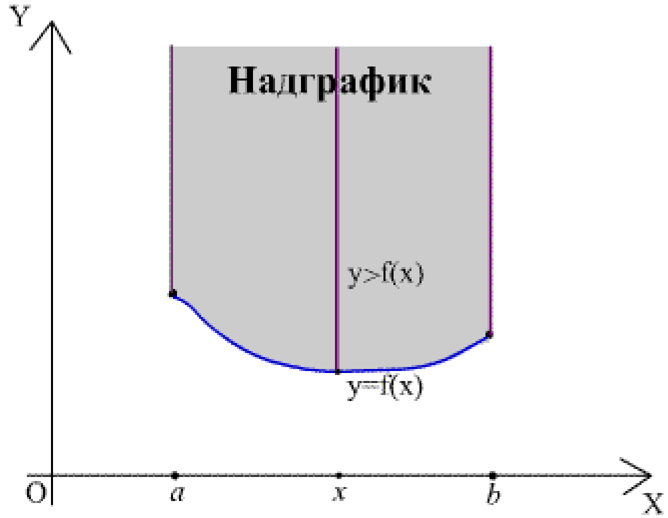


Рис. 5. Надграфик функции.

Выпуклые функции определим как функции с выпуклым надграфиком.

Определение 4. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на отрезке* $[a, b]$ *и ее надграфик является выпуклым множеством. Тогда функция* f *называется выпуклой на* $[a, b]$.

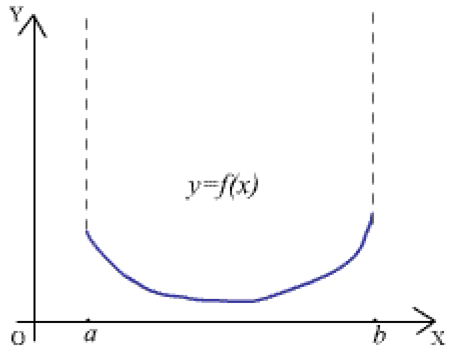


Рис. 6. Пример выпуклой функции

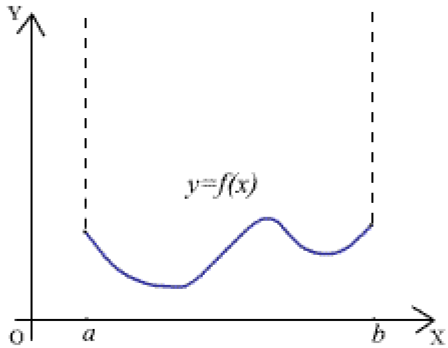


Рис. 7. Пример невыпуклой функции

Таким образом, функция $y = f(x)$ выпукла, если отрезок, соединяющий любые две точки M_1 и M_2 ее надграфика, целиком содержится в надграфике. Покажем, что для проверки выпуклости надграфика функции достаточно установить справедливость следующего условия: отрезок, соединяющий любые две точки M'_1 и M'_2 ее графика, целиком содержится в надграфике.

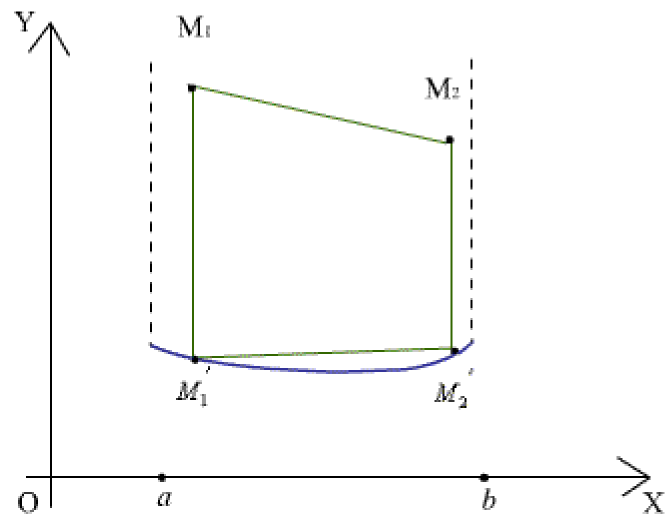


Рис. 8. Иллюстрация критерия выпуклости надграфика функции

Действительно, выберем в надграфике произвольно точки M_1 и M_2 и найдем их проекции M'_1 и M'_2 на график функции. Если отрезок $M'_1M'_2$ содержится в надграфике, то и трапеция $M'_1M_1M_2M'_2$ вместе со стороной M_1M_2 также содержится в надграфике.

Следовательно, определение 4 эквивалентно следующему определению.

Определение 5. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на отрезке* $[a, b]$. *Эта функция называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две точки ее графика, расположен не ниже той части графика, которую он стягивает.*

Отрезок, соединяющий две точки графика, называется хордой графика. Все определения 1-5 сформулированы геометрически. Однако определение 5 допускает адекватное аналитическое выражение.

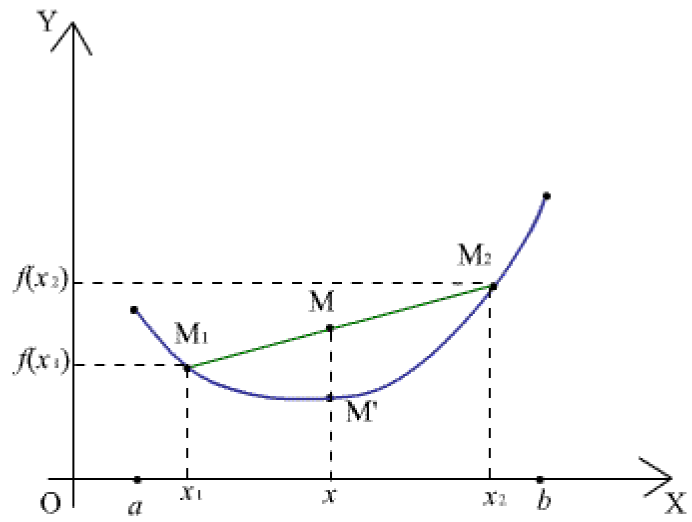


Рис. 9. Иллюстрация определения выпуклой функции

Действительно, пусть функция $y = f(x)$ выпукла. Выберем произвольно точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Тогда точки M_1 с координатами $(x_1, f(x_1))$ и M_2 с координатами $(x_2, f(x_2))$ принадлежат графику функции. Выберем произвольно точку $x \in [x_1, x_2]$. Согласно (2) x можно представить в виде

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

с некоторым параметром $\lambda \in [0, 1]$. На графике функции точке x соответствует точка M' с координатами

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2,\ f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)).$$

Кроме того, на хорде, соединяющей M_1 и M_2, согласно (2) точке x соответствует точка M с координатами

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2,\ \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)).$$

Тот факт, что точки M' и M находятся на одной вертикальной прямой, причем M находится не ниже M', выражается аналитическим неравенством

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Следовательно, геометрические определения 4 и 5 эквивалентны следующему аналитическому определению.

Определение 6. *Пусть функция f определена на отрезке* $[a, b]$. *Эта функция называется выпуклой, если для любых* $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, *и любого* $\lambda \in [0, 1]$ *выполняется неравенство*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \tag{3}$$

3. Критерий выпуклости функции

Аналитическое определение 6 выпуклости функции на отрезке позволяет применить средства дифференциального исчисления для ее исследования.

Теорема 1. (Критерий выпуклости дифференцируемой функции).

Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$. *Эта функция является выпуклой тогда и только тогда, когда ее производная* f' *не убывает на* $[a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ и обозначим

$$\Phi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Очевидно, что

$$\Phi(0) = f(x_2), \quad \Phi(0) = f(x_1).$$

Функция Φ является композицией линейной функции относительно λ и дифференцируемой на $[x_1, x_2]$ функции f. Поэтому Φ дифференцируема на $[0, 1]$ и ее производная вычисляется по формуле

$$\Phi'(\lambda) = f'(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)(x_1 - x_2),\ 0 \le \lambda \le 1. \tag{4}$$

В частности, при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ из (4) получаем

$$\Phi'(0) = f'(x_2)(x_1 - x_2),\ \Phi'(1) = f'(x_1)(x_1 - x_2). \tag{5}$$

Докажем сначала необходимость теоремы 1. Предположим, что функция f выпукла на отрезке $[a, b]$, и докажем, что f' не убывает. Используя функцию Φ, перепишем неравенство (3) в виде

(6) $$\Phi(\lambda) \le \lambda\Phi(1) + (1 - \lambda)\Phi(0).$$

Вычитая $\Phi(0)$ из обеих частей неравенства (6) и деля на $x_1 - x_2 < 0$, получим

$$\frac{\Phi(\lambda)-\Phi(0)}{\lambda} \le \Phi(1)-\Phi(0) = f(x_1)-f(x_2)$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от λ, а предел при $\lambda \to 0$ левой части равен $\Phi'(0)$. Поэтому

$$\Phi'(0) \le f(x_1) - f(x_2)$$

и ввиду (5) после деления на $x_1 - x_2 < 0$ получаем неравенство

(7) $$f'(x_2) \ge \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

Аналогично, вычитая $\Phi(1)$ из обеих частей неравенства (6) и деля на $x_1 - x_2 < 0$ получим

$$\frac{\Phi(\lambda)-\Phi(1)}{\lambda-1} \ge \Phi(1)-\Phi(0) = f(x_1)-f(x_2).$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от λ, а предел при $\lambda \to 1$ левой части равен $\Phi'(1)$. Поэтому

$$\Phi'(1) \ge f(x_1) - f(x_2)$$

и ввиду (5) после деления на $x_1 - x_2 < 0$ получаем неравенство

(8) $$f'(x_1) \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

Сравнение (7) и (8) приводит к заключению, что для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f'(x_1) \le f'(x_2),$$

которое означает, что f' не убывает на $[a, b]$. Теперь докажем достаточность теоремы. Предположим, что f' не убывает на $[a, b]$ и докажем, что f выпукла. Выберем $\lambda \in (0, 1)$ и применим к функции Φ на отрезке $[0, \lambda]$ теорему Лагранжа, согласно которой существует точка $\xi_1 \in (0, \lambda)$ такая, что

(9) $$\frac{\Phi(\lambda)-\Phi(0)}{\lambda} = \Phi'(\xi_1) = f'(\xi_1 x_1 + (1-\xi_1)x_2)(x_1 - x_2).$$

Аналогично применим к функции Φ на отрезке $[\lambda, 1]$ теорему Лагранжа, согласно которой существует точка $\xi_2 \in (\lambda, 1)$ такая, что

(10) $$\frac{\Phi(\lambda)-\Phi(1)}{\lambda - 1} = \Phi'(\xi_2) = f'(\xi_2 x_1 + (1-\xi_2)x_2)(x_1 - x_2).$$

Поскольку

$$0 < \xi_1 < \lambda < \xi_2 < 1,$$

то

$$\xi_1 x_1 + (1 - \xi_1)x_2 \geq \xi_2 x_1 + (1 - \xi_2)x_2,$$

и из монотонности f' следует, что

$$f(\xi_1 x_1 + (1 - \xi_1)x_2) \geq f(\xi_2 x_1 + (1 - \xi_2)x_2).$$

Умножая последнее неравенство на $x_1 - x_2 < 0$, из (9) и (10) выводим неравенство

$$\frac{\Phi(\lambda)-\Phi(0)}{\lambda} \leq \frac{\Phi(\lambda)-\Phi(1)}{\lambda - 1},$$

которое после элементарных преобразований приводит к неравенству

$$\Phi(\lambda) \leq \lambda\Phi(1) + (1 - \lambda)\Phi(0),$$

эквивалентному (3). Следовательно, функция f выпукла на $[a, b]$, что заканчивает доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть функция f дважды дифференцируема на отрезке* $[a, b]$. *Эта функция является выпуклой тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in [a, b]$ справедливо неравенство $f''(x) \geq 0$.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что производная f' дважды дифференцируемой функции f не убывает тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$. В случае дифференцируемых функций дадим другую геометрическую интерпретацию выпуклости.

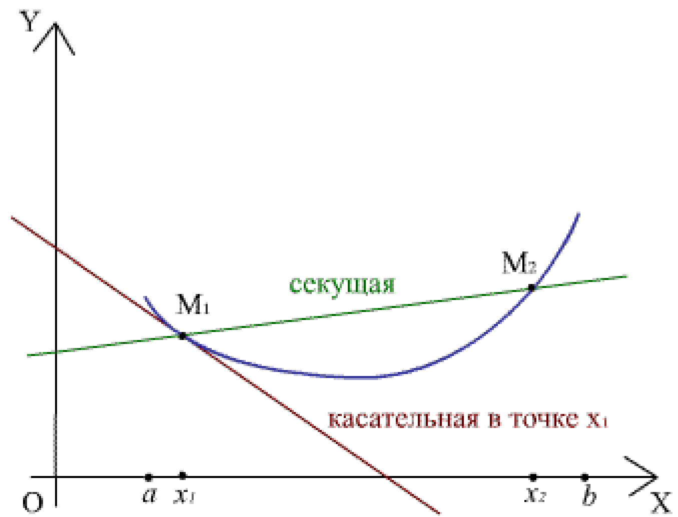


Рис. 10. Геометрическая интерпретация выпуклости

График дифференцируемой функции имеет касательную в каждой точке. Через точки M_1 и M_2 на графике дифференцируемой выпуклой функции проведем прямую, называемую секущей. Хорда M_1M_2 составляет часть секущей и находится не ниже стягиваемой ею дуги графика. Если x_2 устремить к x_1, то секущая устремится к касательной к графику в точке x_1, хорда M_1M_2 выродится в точку касания и касательная окажется целиком не выше графика. Таким образом, дифференцируемая функция выпукла тогда и только тогда, когда ее график расположен не ниже касательной в любой точке.

4. Точка перегиба функции

Определение выпуклой функции основано на свойстве выпуклости ее надграфика. Если вместо выпуклости надграфика предположить выпуклость множества, расположенного под графиком функции, то придем к симметричному геометрическому определению свойства функции, зачастую называемому вогнутостью. Аналитическое выражение определения вогнутости сведется к повторению определения 6 с заменой в нем знака неравенства на противоположный. Очевидно, что по аналогии с теоремой 1 и следствием 1 критерий вогнутости дифференцируемой функции означает противоположный характер монотонности f' или справедливость неравенства $f''(x) \le 0$ для дважды дифференцируемой функции f.

Естественно, что произвольная функция в некоторых точках может менять характеристики своего поведения, включая переход от выпуклости к вогнутости или обратно.

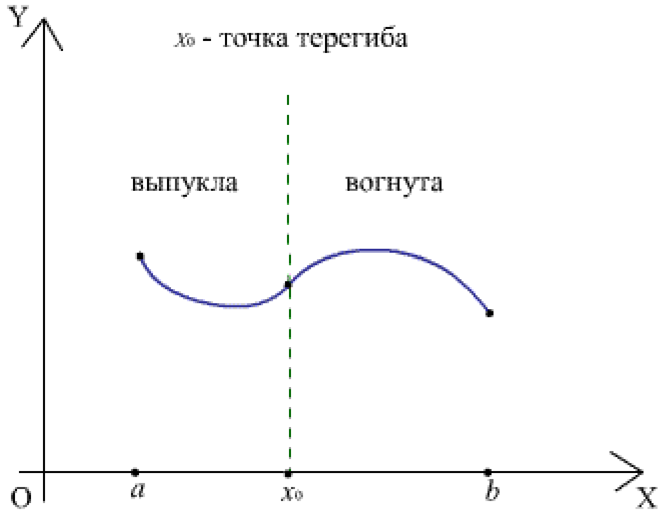


Рис. 11. Точка перегиба.

Определение 7. *Пусть функция f определена на отрезке* $[a, b]$ *и* $x_0 \in (a, b)$. *Если функция f выпукла на одном из отрезков* $[a, x_0]$ *или* $[x_0, b]$ *и вогнута на другом, то точка x_0 называется точкой перегиба функции f.*

5. Необходимое условие точки перегиба

Теорема 1 и ее следствие 1 дают быстрое решение задачи о необходимом условии точки перегиба.

Теорема 2. (Необходимое условие точки перегиба). *Пусть функция f дифференцируема на* $[a, b]$ *и дважды дифференцируема в точке* $x_0 \in (a, b)$. *Если x_0 является точкой перегиба функции f, то* $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 1 производная f' меняет характер монотонности при переходе через точку x_0. Поэтому $f'(x) - f'(x_0)$ не меняет знака в окрестности точки x_0, а следовательно,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

имеет в этой окрестности разные знаки при $x < x_0$ и $x > x_0$. Значит, равные между собой значения

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

не могут иметь одинаковых знаков, то есть

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

что доказывает теорему 2.

Лекция 19

1. Первообразная. Множество первообразных данной функции

Действие дифференцирования функции на интервале (a, b) можно истолковать как операционное действие $f \to f'$, сопоставляющее каждой дифференцируемой на (a, b) функции f ее производную f'. В таком смысле естественно рассчитывать на возможность обратного сопоставления $f' \to f$, которому дадим специальное название.

Определение 1. *Функция F называется первообразной функции f на интервале (a, b), если F дифференцируема и для всех $x \in (a, b)$ выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x).$$

Очевидно, что понятие первообразной является обратным по отношению к производной, а операцию отыскания первообразной разумно воспринимать как сопоставление $f \to F$ или $F' \to F$, то есть действие, обратное к дифференцированию.

Определение 1 распространяется и на отрезок $[a, b]$ с той оговоркой, что значение F' в крайних точках a и b понимается односторонне:

$$F'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}, \qquad F'(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b}.$$

Покажем, что первообразная определяется неоднозначно, но множество всех первообразных данной функции устроено довольно просто.

Теорема 1. *Если функция f имеет первообразную F на интервале* (a, b), *то множество всех первообразных функции f на* (a, b) *имеет вид*

$$\{F + C\colon\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство. Смысл теоремы состоит в том, что если F - первообразная функции f, то $F + C$, где C - произвольное действительное число, также является первообразной функции f и других первообразных функция f не имеет.

Докажем сначала первое утверждение. Пусть F является первообразной для f. Значит, функция F дифференцируема на (a, b) и на этом интервале выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Но тогда для любого действительного числа C также справедливо равенство $(F + C)'(x) = F'(x) = f(x)$, которое доказывает, что функция $F + C$ также является первообразной функции f на (a, b).

Теперь покажем, что множество первообразных функции f вполне исчерпывается функциями $F + C$. Предположим, что функция G является первообразной для f. Значит, функция G дифференцируема на (a, b) и на этом интервале выполняется равенство $G'(x) = f(x)$. Образуем функцию $H = G - f$, которая дифференцируема на (a, b) и на этом интервале справедливо равенство

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Выберем произвольно точки x_1 и x_2 на (a, b), $x_1 < x_2$. Применим теорему Лагранжа к функции H на (a, b), согласно которой найдется точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что справедлива формула

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $H'(c) = 0$, то и $H(x_2) - H(x_1) = 0$. Это показывает, что во всех точках интервала (a, b) функция H принимает одинаковые значения, то есть $H(x) = C$ для некоторого действительного числа C тождественно на (a, b). Возвращаясь к функциям F и G, приходим к формуле

$$G(x) = F(x) + C, \qquad x \in (a, b),$$

которая заканчивает доказательство теоремы 1.

Теми же рассуждениями устанавливаем, что теорема 1 справедлива и в применении к отрезку $[a, b]$.

2. Неопределенный и определенный интегралы

Определение 2. *Пусть функция f имеет первообразную на отрезке* $[a, b]$. *Тогда множество всех первообразных функции f на* $[a, b]$ *называется неопределенным интегралом от функции f на* $[a, b]$ *и обозначается*

$$\int f(x)dx.$$

Теорема 1 показывает, что если F - одна из первообразных функции f на $[a, b]$, то неопределенный интеграл является множеством функций $F + C$, где C - произвольное действительное число.

Более полезным является понятие определенного интеграла.

Определение 3. *Пусть функция f имеет первообразную F на отрезке* $[a, b]$. *Тогда значение*

$$F(b) - F(a)$$

называется определенным интегралом от функции f на $[a, b]$ *и обозначается*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Определение 3 корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора первообразной. Действительно, пусть функция G также является первообразной функции f на $[a, b]$. Согласно теореме 1 $G = F + C$, где C - некоторое действительное число. Тогда

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

что устанавливает корректность определения 3.

Покажем, что определенный интеграл обладает свойством линейности.

Теорема 2. *Если функции f и g имеют на отрезке* $[a, b]$ *первообразные, то функции* αf, $\alpha \in \mathbb{R}$, *и* $f + g$ *также имеют первообразные на* $[a, b]$ *и справедливы формулы*

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть функция f имеет первообразную F, а функция g имеет первообразную G на отрезке $[a, b]$. Это значит, что F и G дифференцируемы на $[a, b]$ и на этом отрезке справедливы формулы

$$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = g(x).$$

Следовательно, функции αF и $F + G$ также дифференцируемы на $[a, b]$ и справедливы формулы

$$(\alpha F)'(x) = \alpha F'(x) = \alpha f(x), \qquad (F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Это означает, что функция αF является первообразной функции αf, а функция $F + G$ является первообразной функции $f + g$ и справедливы формулы

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = (\alpha F)(b) - (\alpha F)(a) = \alpha(F(b) - F(a)) = \alpha\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) =$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

которые заканчивают доказательство теоремы 2.

Следующая теорема выражает свойство аддитивности определенного интеграла.

Теорема 3. *Если функция f имеет первообразную на отрезке* $[a, b]$, *то для любой точки* $c \in (a, b)$ *функция f имеет первообразную на* $[a, c]$ *и* $[c, b]$ *и справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть функция f имеет первообразную F на отрезке $[a, b]$. Значит, F дифференцируема на $[a, b]$ и на этом отрезке справедлива формула

$$F'(x) = f(x).$$

Следовательно, F дифференцируема на любой части отрезка $[a, b]$ и остается первообразной функции f на $[a, c]$ и $[c, b]$ и справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

что заканчивает доказательство теоремы 3.

Определение 3 рассматривает определенный интеграл только в случае, когда в знаке интеграла нижний предел строго меньше верхнего предела. Однако сама формула определения 3 делает естественным следующее соглашение: *в случае $a > b$ для функции f, имеющей первообразную на отрезке* $[b, a]$, *будем считать, что*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

а в случае $a = b$ будем считать, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Для нахождения первообразных элементарных функций мы располагаем основной таблицей производных, которую следует прочитать в обратном порядке:

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x;$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \log x + C;$$

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Расширение возможностей нахождения первообразных состоит в применении свойства линейности по теореме 2, а также попытке прочитать в обратном порядке формулы дифференцирования произведения функций и композиции функций, о чем пойдет речь в следующих частях лекции.

3. Интегрирование по частям определенного интеграла

Прочтение в обратном порядке формулы производной произведения дифференцируемых функций приводит к следующему правилу, называемому интегрированием по частям.

Теорема 4. *Пусть функции f и g дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и по крайней мере одно из двух произведений $f'g$ или fg' имеет первообразную на $[a, b]$. Тогда второе из этих двух произведений также имеет первообразную на $[a, b]$ и справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b (f'g)(x)dx = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b (fg')(x)dx.$$

Доказательство. Произведение fg дифференцируемых функций f и g дифференцируемо и справедлива формула

$$(fg)'(x) = (f'g)(x) + (fg')(x).$$

Предположим, что произведение fg' имеет первообразную H на отрезке $[a, b]$. В случае, когда $f'g$ имеет первообразную, рассуждения симметричны. Перепишем формулу производной произведения в виде

$$(f'g)(x) = (fg)'(x) - (fg')(x).$$

Из того, что функция $(fg)'$ имеет первообразную fg и произведение fg' имеет первообразную H на $[a, b]$, по теореме 2 следует, что произведение $f'g$ имеет первообразную на $[a, b]$, которую обозначим через E, и справедлива формула

$$E(x) = (fg)(x) - H(x).$$

Подставим в эту формулу $x = b$ и $x = a$ и после вычитания второго выражения из первого получим

$$\int_a^b (f'g)(x)dx = E(b) - E(a) = (fg)(b) - (fg)(a) - (H(b) - H(a)) =$$

$$(fg(b)) - (fg)(a) - \int_a^b (fg')(x)dx,$$

что заканчивает доказательство теоремы 4.

Если в теореме 4 рассматривать значение b как переменную величину, то теорема 4 представляет инструмент интегрирования по частям в задаче о нахождении первообразных.

4. Замена переменной в определенном интеграле

Прочтение в обратном порядке формулы производной композиции дифференцируемых функций приводит к следующему правилу, называемому заменой переменной, или подстановкой.

Теорема 5. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$ так, что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда функция $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную на $[\alpha, \beta]$ и справедлива формула замены переменной*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть функция f имеет первообразную F на отрезке $[a, b]$. Это значит, что функция F дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке справедливо равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Условия теоремы 5 обеспечивают корректное определение композиций функций $f\circ\varphi$ и $F\circ\varphi$. Поскольку каждая из функций F и φ дифференцируема на своей области определения, то и их композиция дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и справедлива формула

$$(F(\varphi))'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Из того, что функция $y = (F(\varphi))'(t)$ имеет первообразную $F^\circ\varphi$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ следует, что и функция $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет ту же первообразную на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, подставляя в $y = F(\varphi(t))$ значения $t = \beta$ и $t = \alpha$ и вычитая второе выражение из первого, получим

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Так как

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

то две последние формулы приводят к формуле замены переменной в определенном интеграле, что заканчивает доказательство теоремы 5.

Если в теореме 5 рассматривать значения b и β как переменные величины, то теорема 5 представляет инструмент замены переменной, или подстановки в задаче о нахождении первообразных.

Лекция 20

1. Геометрический подход в теории интеграла

Геометрический подход в теории интеграла известен со времен Древней Греции, где научились вычислять площадь круга, длину окружности, объемы шара, конуса и других фигур, отличных от многогранника.

В программе современной школы объяснение способов этих вычислений также вполне научно и одновременно классично. Так например, площадь круга воспринимается как предел площадей вписанных в круг правильных многоугольников при неограниченном удвоении их сторон и равный ему предел площадей описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении их сторон.

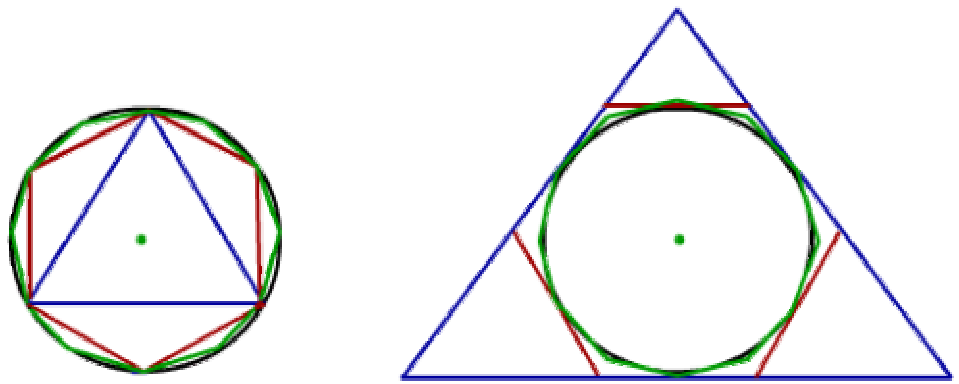


Рис. 1. Удвоение сторон вписанных и описанных многоугольников

Многоугольники, вписанные в окружность или описанные около нее, выбраны не только потому, что они допускают технически реализуемый алгоритм вычисления площади, а еще и потому, что нет других фигур с вычисляемой площадью.

В самом деле, полагая по определению, что площадь квадрата со стороной 1 равна 1, мы приходим к выводу, что площадь квадрата со стороной a равна a^2, а площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. Отсюда нетрудно вывести формулу площади треугольника и фигуры, составленной из треугольников, - многоугольников.

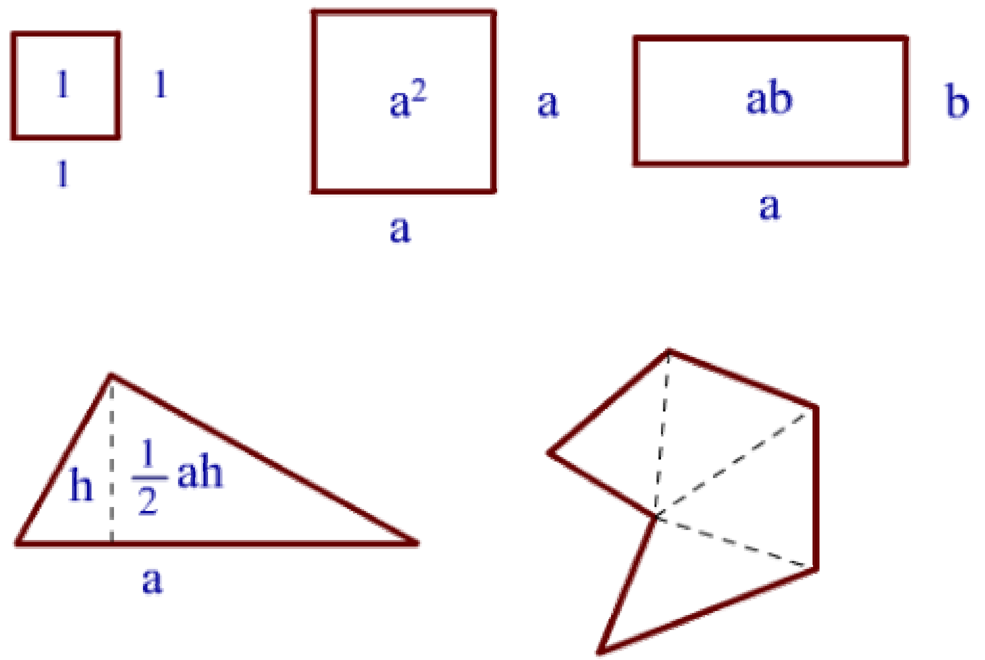


Рис. 2. Площади фигур, составленных из треугольников

В математическом анализе геометрический подход воплощается в идее вычисления площади фигуры, ограниченной графиком функции и осевыми отрезками. Предположим, что функция f определена и положительна на отрезке $[a, b]$, и поставим задачу вычисления площади фигуры, ограниченной графиком функции f, отрезком $[a, b]$ на оси OX и отрезками, параллельными оси OY. Эту фигуру уместно назвать криволинейной трапецией или даже прямоугольной криволинейной трапецией, поскольку граница фигуры состоит из трех отрезков, два из которых параллельны, а третий им перпендикулярен, и линии графика.

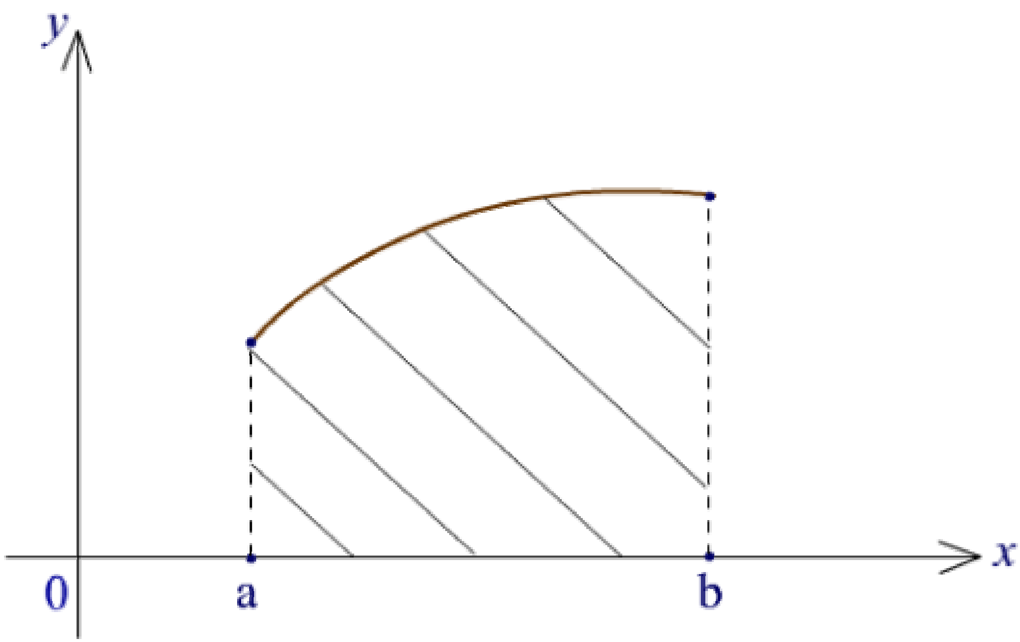


Рис. 3. Криволинейная трапеция

Поддержим идею приближения фигуры многоугольниками изнутри и извне. Вид криволинейной трапеции подсказывает вид многоугольников - прямоугольники со сторонами, параллельными оси OY, и с одним из оснований, расположенным на оси OX.

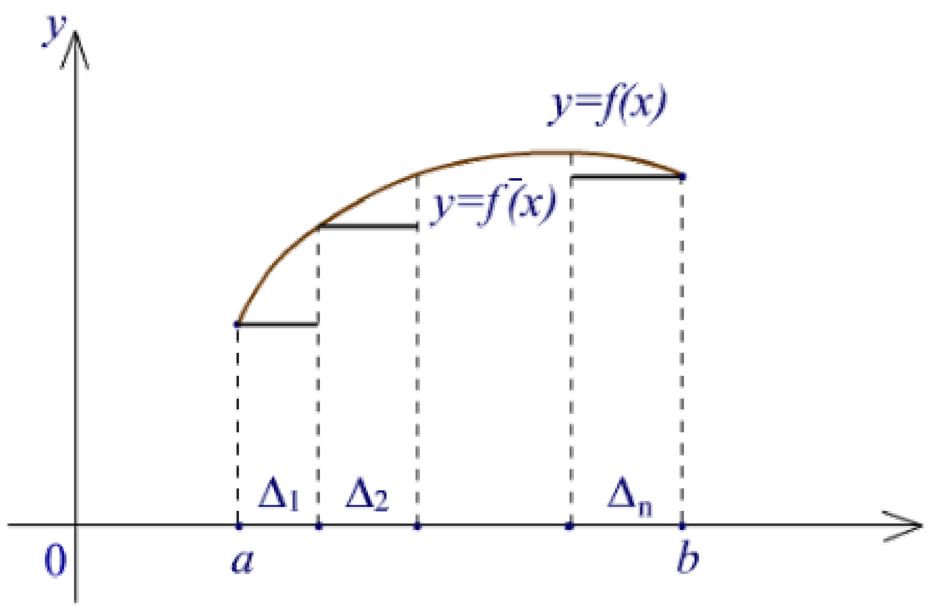


Рис. 4. Приближение криволинейной трапеции многоугольниками изнутри

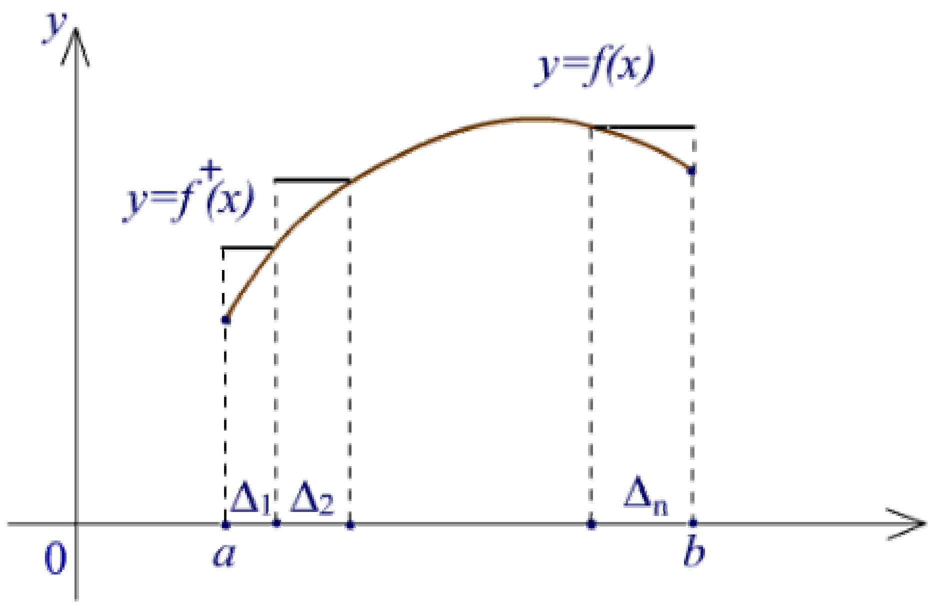


Рис. 5. Приближение криволинейной трапеции многоугольниками извне

Переведем геометрическую идею на язык математического анализа. Построение вписанных прямоугольников означает разбиение отрезка $[a, b]$ на части $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ и проведение верхних сторон прямоугольников, которые образуют график некоторой функции f^-, постоянной на каждом из $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Так как верхние стороны прямоугольников расположены ниже графика функции f, то $f^- \leq f$. Построение описанных прямоугольников, верхние стороны которых расположены выше графика функции f, приводит к созданию функции f^+, постоянной на каждом из $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, и такой. что $f^+ \geq f$.

Площадь криволинейной трапеции должна восприниматься одновременно как верхняя грань сумм площадей всех вписанных в нее прямоугольников и как нижняя грань сумм площадей всех описанных около нее прямоугольников.

2. Интеграл от характеристических функций

Сначала дадим определение характеристической функции множества.

Определение 1. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}$. *Функция* χ_E, *задаваемая формулой*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

Очевидны формулы, связывающие теоретико-множественные операции и арифметические операции над характеристическими функциям

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B,$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

и если $B \subset A$, то

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_B.$$

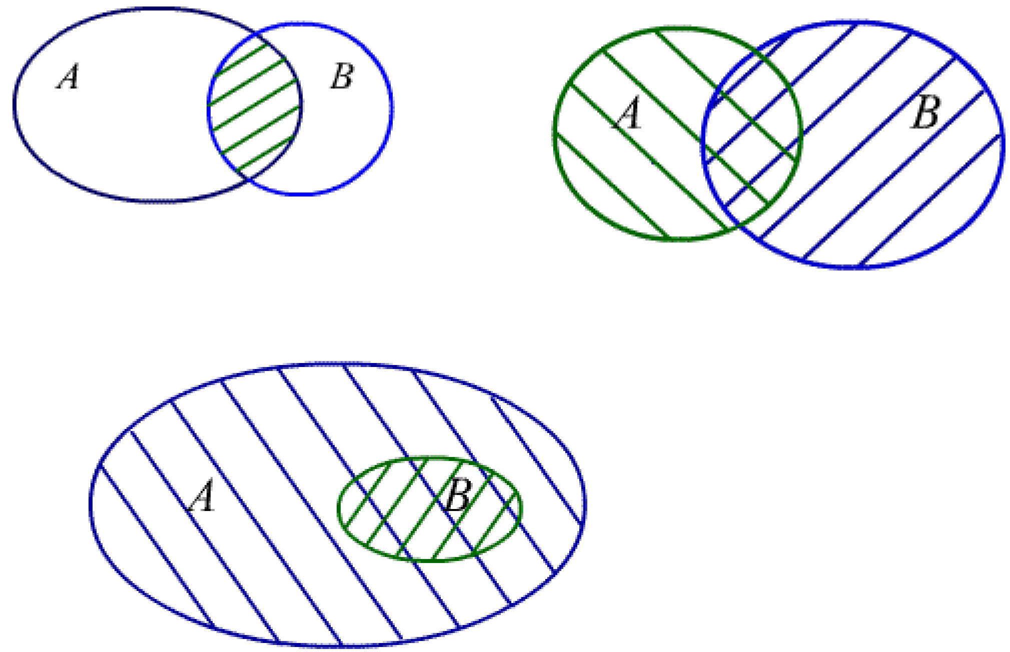


Рис. 6. Соотношения между множествами.

Начнем аналитическую реализацию геометрического подхода с описания функций, график которых является верхней стороной прямоугольника высоты 1. Будем рассматривать четыре типа множеств Δ, лежащих в основании прямоугольника: отрезки, интервалы и полуотрезки (полуинтервалы)

(1) $$[a, b], \quad (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b].$$

В частности, если $a = b$, то отрезок $[a, a]$ вырождается в точку $\{a\}$. Графиком характеристической функции χ_Δ является отрезок на высоте 1, расположенный над Δ, и часть оси OX, находящейся вне Δ.

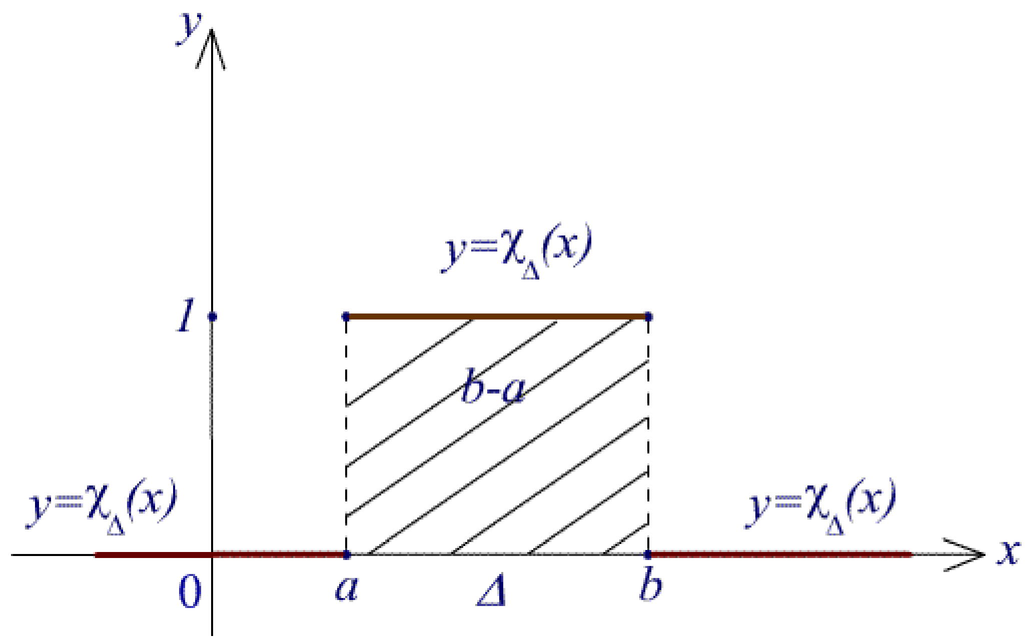


Рис. 7. График характеристической функции множества Δ.

<u>Определение 2.</u> *Пусть* Δ *- одно из множеств* (1). *Тогда число* ($b-a$) *называется интегралом Римана от характеристической функции* χ_Δ *и обозначается*

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_\Delta(x)dx$$

Число ($b-a$) численно выражает площадь прямоугольника P высоты 1 с основанием Δ. Различие между типами множества Δ состоит в том, что одна или обе боковые стороны прямоугольника P могут принадлежать или не принадлежать P. Это различие не сказывается на площади прямоугольника P, поскольку площадь отрезка, являющегося боковой стороной прямоугольника, равна нулю.

3. Интеграл от ступенчатых функций

Теперь определим функции, графики которых изображают верхние или нижние стороны нескольких прямоугольников с основаниями $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$.

Определение 3. *Пусть* $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ - *множества одного из типов* (1) *и* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - *действительные числа. Тогда функция*

(2)
$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\Delta_k}$$

называется ступенчатой функцией.

Представление (2) не единственно. От произвольного представления (2) можно перейти, в частности, к такому, в котором используются характеристические функции непересекающихся множеств. Например, пусть в представлении (2) два множества Δ_k и Δ_j имеют непустое пересечение. Тогда

$$\Delta_k \cup \Delta_j = \Delta_1' \cup \Delta_2' \cup \Delta_3', \qquad \Delta_2' = \Delta_k \cap \Delta_j,$$

где множества $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3'$ - попарно непересекающиеся.

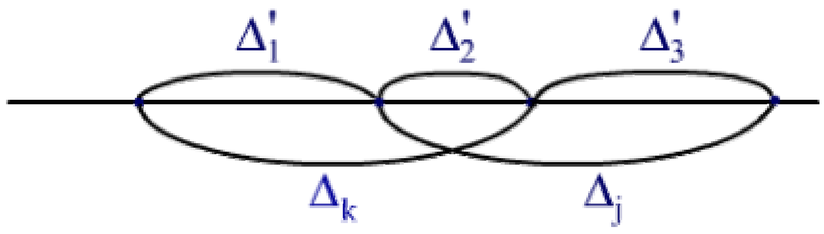


Рис. 8. Случай $\Delta_j \not\subset \Delta_k$

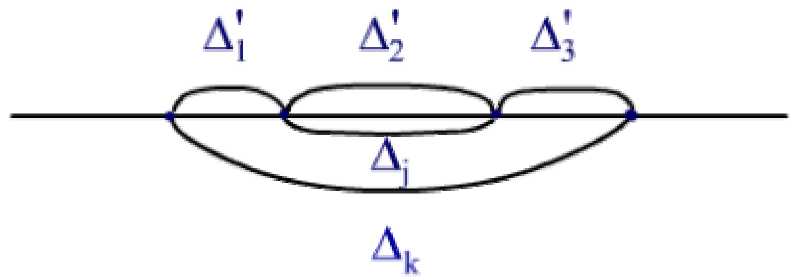


Рис. 9. Случай $\Delta_j \subset \Delta_k$

Так как $\Delta_k = \Delta_1' \cup \Delta_2'$ и $\Delta_j = \Delta_2' \cup \Delta_3'$, то

$$\lambda_k\chi_{\Delta k} + \lambda j\chi_{\Delta j} = \lambda_k\chi_{\Delta 1'} + (\lambda_k + \lambda_j)\chi_{\Delta 2'} + \lambda_j\chi_{\Delta 3'}.$$

Произведем в представлении (2) замену по этой формуле. Переходя к остальным парам пересекающихся множеств в измененном представлении (2), найдем новое представление

(3) $$f = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \chi_{\Delta'_k}$$

с непересекающимися множествами Δ_1', Δ_2', ..., Δ_m'. Заметим, что переход к представлению (3) с непересекающимися множествами произошел вследствие дробления промежутков исходного представления (2) на более мелкие.

График функции (3) изображается ступеньками на высоте μ_k, расположенными над множествами Δ_k', и частью оси OX, находящейся вне $\Delta_1' \cup \Delta_2' \cup ... \cup \Delta_m'$.

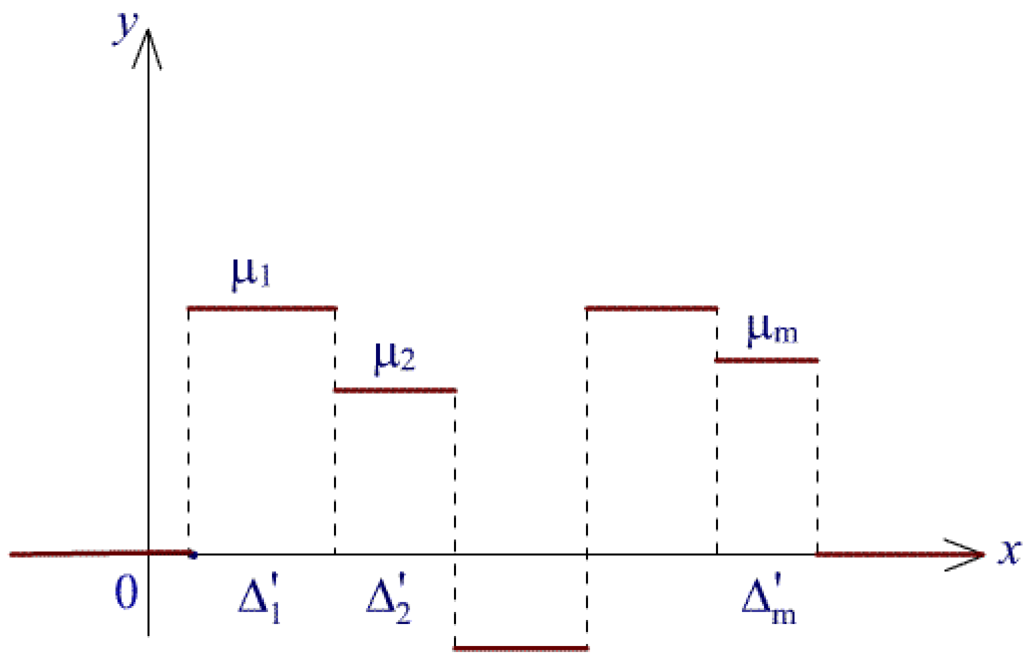


Рис. 10. График функции $f = \sum mk{=}1\ \mu_k\chi_{\Delta k'}$.

Если f и g - ступенчатые функции, то сумма $f + g$ и произведение fg также являются ступенчатыми функциями. В представлениях для f и g можем использовать один и тот же набор множеств. Действительно, если

$$f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \chi_{\Delta_k} \quad \text{и} \quad g = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \chi_{\Delta'_j},$$

где множества $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ - попарно непересекающиеся и множества $\Delta_1', \Delta_2', ..., \Delta_m'$ - попарно непересекающиеся, то положим

$$\Delta_{kj}'' = \Delta_k \cap \Delta_j'.$$

Тогда

$$\Delta_k = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta''_{kj}, \qquad \Delta'_j = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta''_{kj},$$

и

$$\chi_{\Delta_k} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{\Delta''_{kj}}, \qquad \chi_{\Delta'_j} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Delta''_{kj}}.$$

Следовательно,

$$f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \chi_{\Delta''_{kj}}, \qquad g = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_j \chi_{\Delta''_{kj}}.$$

В этих представлениях некоторые из множеств Δ_{kj}'' могут оказаться пустыми. В этом случае Δ''_{kj}. Снова заметим, что переход к одинаковым непересекающимся множествам в представлениях для f и g произошел вследствие дробления промежутков исходных представлений на более мелкие.

Процедура перехода к одинаковым множествам применима и в случае $f = g$, то есть для разных представлений (2) одной и той же функции f.

Определим интеграл от ступенчатой функции. Если Δ - одно из множеств (1), то будем обозначать через $|\Delta| = b - a$ длину Δ.

Определение 4. *Пусть f - ступенчатая функция,*

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\Delta_k}$$

Тогда число

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\Delta_k|$$

называется интегралом Римана от функции f и обозначается

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Таким образом, согласно определению 4

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\Delta_k}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{\Delta_k}(x)dx.$$

Покажем, что определение 4 интеграла от ступенчатой функции не зависит от способа ее представления. Действительно, если ступенчатая функция *f* имеет два разных представления, то как мы показали, дроблением множеств в каждом из представлений на более мелкие можно оба представления свести к одному общему представлению с непересекающимися множествами. Таким образом, для доказательства независимости интеграла от ступенчатой функции от ее представления достаточно показать, что интеграл не меняется при дроблении любого из множеств Δ_k одного из типов (1) на более мелкие части.

Пусть

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

где множества Δ_1 и Δ_2 имеют пустое пересечение. Тогда

$$\lambda\chi_{\Delta} = \lambda\chi_{\Delta 1} + \lambda\chi_{\Delta 2} \quad \text{и} \quad |\Delta| = |\Delta_1| + |\Delta_2|.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\chi_{\Delta}(x)dx = \lambda|\Delta| = \lambda|\Delta_1| + \lambda|\Delta_2| = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\chi_{\Delta_1}(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\chi_{\Delta_2}(x)dx,$$

что показывает совпадение интеграла от ступенчатой функции на множестве Δ и той же функции на множествах Δ_1 и Δ_2. Значит, однократное дробление промежутка на части не меняет интеграла, и то же происходит при дальнейшем многократном дроблении.

4. Свойства интеграла от ступенчатых функций

Докажем, что интегралы от ступенчатых функций линейны и монотонны. Следующая теорема выражает свойство линейности.

Теорема 1. *Пусть f и g - ступенчатые функции и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие формулы*

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha f(x)dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} (f+g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Доказательство. Мы уже установили, что αf и $f+g$ - ступенчатые функции. Кроме того, обе функции f и g можно представить линейными комбинациями характеристических функций одного и того же набора непересекающихся множеств. Осталось вывести формулы теоремы 1.

Пусть

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\Delta_k} \quad \text{и} \quad g = \sum_{j=1}^{n} \mu_k \chi_{\Delta_k}.$$

Тогда

$$\alpha f = \sum_{k=1}^{n} \alpha \lambda_k \chi_{\Delta_k} \quad \text{и} \quad f+g = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) \chi_{\Delta_k}.$$

Отсюда выводим формулы

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha \lambda_k |\Delta_k| = \alpha \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\Delta_k| = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g)(x)dx = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k)|\Delta_k| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\Delta_k| + \sum_{k=1}^{n} \mu_k |\Delta_k| =$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)dx,$$

что заканчивает доказательство теоремы 1.

Свойство монотонности интеграла от ступенчатых функций выражается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть f и g - ступенчатые функции и для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Доказательство. Представим функции f и g линейными комбинациями характеристических функций одного и того же набора непересекающихся множеств. Пусть

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\Delta_k} \qquad \text{и} \qquad g = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \chi_{\Delta_k}.$$

Выберем произвольно точку $x \in \Delta_k$. Тогда

$$f(x) = \lambda_k \quad \text{и} \quad g(x) = \mu_k.$$

Неравенство $f(x) \le g(x)$ влечет неравенство $\lambda_k \le \mu_k$, справедливое для всех $k = 1, 2, ..., n$. Теперь цепочка соотношений

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\Delta_k| \le \sum_{k=1}^{n} \mu_k |\Delta_k| = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

заканчивает доказательство теоремы 2.

Лекция 21

1. Верхний и нижний интегралы

Нам удобно рассматривать функции, заданные на всей числовой оси. Однако интеграл как площадь криволинейной трапеции следует определять, по крайней мере на первом этапе, на отрезке. Поэтому будем считать, что вне этого отрезка функция принимает нулевые значения. Такое соглашение обоюдно выгодно: оно позволяет все функции рассматривать на числовой оси, а геометрический подход сохраняет силу, так как вне заданного отрезка график функции совпадает с осью OX и образует фигуру с нулевой площадью.

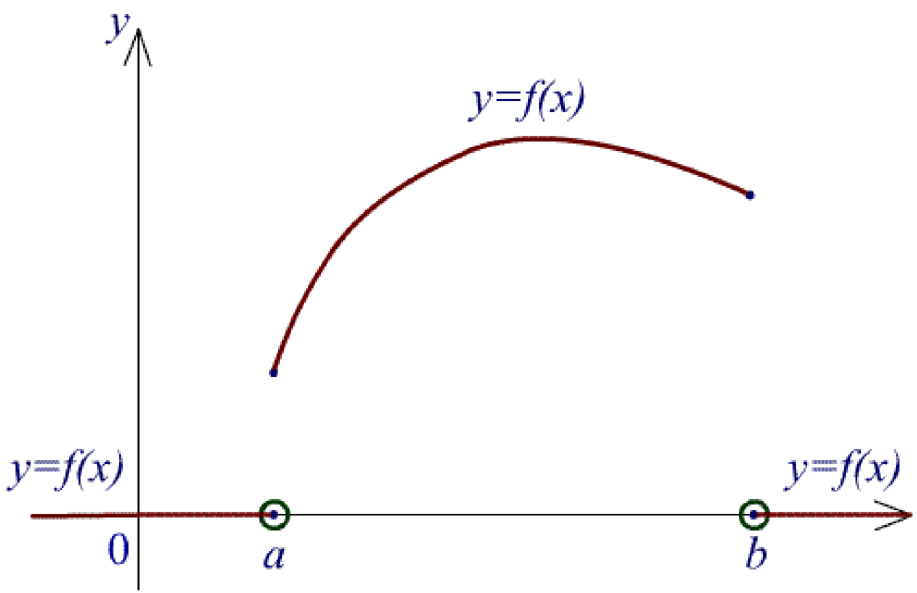


Рис. 1. Доопределение функции f на всю ось OX.

Определение 1. *Функция f называется финитной, если она определена на* $\mathbb{R}$ *и обращается в нуль вне некоторого отрезка* $[a, b]$.

Обратим внимание, что все ступенчатые функции финитны.

Реализация идеи об исчерпании криволинейной трапеции прямоугольниками изнутри и подсчету верхней грани сумм их площадей выражается аналитически в следующем определении.

Определение 2. *Пусть функция f финитна и ограничена. Тогда число*

$$\sup_{f_{cm} \le f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx,$$

где f_{cm} - ступенчатые функции, называется нижним интегралом от функции f и обозначается $\underline{I}(f)$.

Аналогично исчерпание криволинейной трапеции прямоугольниками извне и подсчет нижней грани сумм их площадей выражается аналитически в определении 3.

Определение 3. *Пусть функция f финитна и ограничена. Тогда число*

$$\inf_{f_{cm} \ge f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx,$$

где f_{cm} - ступенчатые функции, называется верхним интегралом от функции f и обозначается $\overline{I}(f)$.

В каждом из определений 2 и 3 требование финитности и ограниченности функции f совершенно естественно, потому что иначе не найдется ступенчатой функции f_{cm}, удовлетворяющей неравенству $f_{cm} \le f$ или $f_{cm} \ge f$.

Если функция f сама является ступенчатой, то из неравенства $f_{cm} \le f$ следует неравенство между интегралами

$$\int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} f(x)dx. \tag{1}$$

Переходя к верхней грани в левой части неравенства (1), заключаем, что

$$\underline{I}(f) \le \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

С другой стороны, функция f входит в число ступенчатых функций, удовлетворяющих неравенству $f_{cm} \le f$, поэтому множество интегралов в левой части неравенства (1) содержит число

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx,$$

а значит, и верхняя грань множества интегралов в левой части неравенства (1) содержит это число. Следовательно,

$$\underline{I}(f) \ge \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Два последних неравенства приводят к заключению: *если f - ступенчатая функция, то*

$$\underline{I}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Симметричными рассуждениями придем к аналогичному заключению: *если f - ступенчатая функция, то*

$$\overline{I}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Выведем соотношение между верхним и нижним интегралами от функций f и $(-f)$ в предположении, что все интегралы существуют

$$\overline{I}(-f) = \inf_{f_{cm} \ge -f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx = \inf_{-f_{cm} \le f} -\int_{\mathbb{R}} (-f_{cm})(x)dx =$$

$$- \sup_{-f_{cm} \le f} \int_{\mathbb{R}} (-f_{cm})(x)dx = -\underline{I}(f).$$

В этой цепочке равенств использовано то, что произведение ступенчатой функции на (-1) остается ступенчатой функцией, и свойство ограниченных множеств

$$\inf(-X) = -\sup X,$$

выведенное в лекции 3. Таким образом, мы вывели соотношение

$$\overline{I}(-f) = -\underline{I}(f).$$

Симметричными рассуждениями приходим к соотношению

$$\underline{I}(-f) = -\overline{I}(f).$$

2. Существование верхнего и нижнего интегралов

Докажем теорему существования верхнего интеграла.

Теорема 1. *Если функция f финитна и ограничена, то она имеет верхний интеграл $\overline{I}(f)$. Кроме того, если f обращается в нуль вне отрезка $[a, b]$ и удовлетворяет неравенствам*

$$m \le f(x) \le M$$

на $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$m(b-a) \le \overline{I}(f) \le M(b-a).$$

Доказательство. Финитность функции f означает, что она обращается в нуль вне некоторого отрезка $\Delta = [a, b]$, а ограниченность функции f означает выполнение неравенств $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$ с некоторыми числами m и M.

Образуем две ступенчатые функции

$$f_1 = m\chi_\Delta \quad \text{и} \quad f_2 = M\chi_\Delta.$$

Поскольку $f_2 \ge f$, то множество чисел

(2) $$\left\{\int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx : f_{cm} \geq f\right\}$$

не пусто, оно содержит, например, число

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx = M(b-a).$$

С другой стороны, $f_1 \leq f$, поэтому для всякой ступенчатой функции f_{cm}, удовлетворяющей неравенству $f_{cm} \geq f$, справедливо неравенство $f_{cm} \geq f_1$, а следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx = m(b-a).$$

Значит, множество чисел (2) ограничено снизу числом $m(b-a)$. Коль скоро всякое непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань, то верхний интеграл

$$\overline{I}(f) = \inf_{f_{cm} \geq f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx$$

существует. Более того, нижняя грань множества не превышает любого элемента множества, поэтому

$$\overline{I}(f) \leq M(b-a).$$

Наконец, нижняя грань множества не меньше любой нижней границы множества, в частности,

$$\overline{I}(f) \geq m(b-a),$$

что заканчивает доказательство теоремы 1.

Разумеется, то же утверждение относится к нижнему интегралу.

Следствие. *Если функция f финитна и ограничена, то она имеет нижний интеграл $\underline{I}(f)$. Кроме того, если f обращается в нуль вне отрезка $[a, b]$ и удовлетворяет неравенствам*

$$m \leq f(x) \leq M$$

на $[a, b]$, *то справедливо неравенство*

$$m(b-a) \le \underline{I}(f) \le M(b-a).$$

Доказательство. Функция f финитна и ограничена вместе с функцией $(-f)$, которая удовлетворяет неравенствам $-M \le -f(x) \le -m$ в точках отрезка $[a, b]$. По теореме 1 существует верхний интеграл $\overline{I}(-f)$ и $-M(b-a) \le \overline{I}(-f) \le -m(b-a)$. Подставляя в эти неравенства $\overline{I}(-f) = -\underline{I}(f)$ и умножая их на (-1), приходим к утверждению следствия и заканчиваем его доказательство.

Строго говоря, соотношение $\overline{I}(-f) = -\underline{I}(f)$ справедливо в предположении существования каждого из написанных интегралов. Поэтому в доказательстве Следствия можно было первым шагом доказать существование нижнего интеграла $\underline{I}(f)$ средствами, аналогичными доказательству теоремы 1.

3. Свойства верхнего и нижнего интегралов

Покажем, что верхний интеграл лишь частично обладает свойствами линейности.

Теорема 2. *Пусть функции f и g финитны и ограничены и $\alpha \ge 0$. Тогда справедливы соотношения*

$$\overline{I}(\alpha f) = \alpha\ \overline{I}(f),$$

$$\overline{I}(f+g) \le \overline{I}(f) + \overline{I}(g).$$

Доказательство. Если функции f и g финитны и ограничены, то такими же являются и функции αf и $f+g$.

Если $\alpha = 0$, то функция $\alpha f = 0$ имеет нулевой интеграл и формула в теореме 2 очевидна.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\overline{I}(\alpha f) = \inf_{f_{cm} \ge \alpha f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx = \inf_{\frac{f_{cm}}{\alpha} \ge f} \alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{f_{cm}(x)}{\alpha} dx =$$

$$\alpha \inf_{\frac{f_{cm}}{\alpha} \geq f} \int_{\mathbb{R}} \frac{f_{cm}(x)}{\alpha} dx = \alpha \overline{I}(f),$$

что доказывает первое утверждение теоремы 2. При этом использовано соображение, что если f_{cm} - произвольная ступенчатая функция, то f_{cm}/α - также произвольная ступенчатая функция.

Докажем второе утверждение теоремы 2. По свойству нижней грани множества в определении

$$\overline{I}(f) = \inf_{f_{cm} \geq f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x) dx$$

для всякого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция $f_1 \geq f$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x) dx < \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

Аналогично применительно к функции g для $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция $g_1 \geq g$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx < \overline{I}(g) + \varepsilon.$$

Положим $h_1 = f_1 + g_1$. Функция h_1 является ступенчатой и удовлетворяет неравенству $h_1 \geq f + g$. Следовательно,

$$\overline{I}(f+g) = \inf_{h_{cm} \geq f+g} \int_{\mathbb{R}} h_{cm}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} h_1(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) dx + \int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx <$$

$$\overline{I}(f) + \varepsilon + \overline{I}(g) + \varepsilon = \overline{I}(f) + \overline{I}(g) + 2\varepsilon.$$

Если в этом неравенстве перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, то получим требуемое неравенство

$$\overline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$$

и заканчиваем доказательство теоремы 2.

Пользуясь связью между верхним и нижним интегралами, можем установить симметричные теореме 2 свойства нижнего интеграла.

Теорема 2 дает простой вывод геометрически очевидного неравенства

$$\underline{I}(f) \le \overline{I}(f),$$

справедливого для всякой финитной ограниченной функции f. Действительно, выстроим по теореме 2 цепочку соотношений

$$0 = \overline{I}(0) = \overline{I}(f - f) \le \overline{I}(f) + \overline{I}(-f) = \overline{I}(f) - \underline{I}(f),$$

из которой мгновенно следует нужное неравенство.

4. Интегрируемые функции и интеграл Римана

Аналитическое завершение геометрического подхода в теории интеграла выражается в следующем определении.

Определение 4. *Финитная ограниченная функция f называется интегрируемой по Риману, если ее верхний и нижний интегралы равны между собой. В этом случае общее значение верхнего и нижнего интегралов называется интегралом Римана от функции f и обозначается*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Таким образом, если функция f интегрируема по Риману, то

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Как ранее отмечалось, этим свойством обладают, например, ступенчатые функции. Следовательно, все ступенчатые функции интегрируемы по Риману и интеграл Римана от ступенчатой функции совпадает с интегралом, данным ей по определению.

Приведем пример, показывающий, что существуют финитные ограниченные функции, неинтегрирумые по Риману.

Пример. Обозначим

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ - рациональное число},\\ 0, \text{ если } x \text{ - иррациональное число.}\end{cases}$$

Функция φ называется *функцией Дирихле*. Эта функция ограничена. Для того, чтобы получить финитную функцию, умножим φ на характеристическую функцию отрезка $\Delta = [0, 1]$ и обозначим $f = \varphi\chi_{[0,\,1]}$. Покажем, что финитная ограниченная функция f не интегрируема по Риману. Действительно, каждый промежуток, не вырождающийся в точку, содержит как рациональные, так и иррациональные числа. Поэтому если ступенчатая функция

$$f_{cm}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\chi_{\Delta_k}$$

удовлетворяет неравенству $f_{cm} \ge f$, то для всех $x \in [0, 1]$, за исключением, быть может, конечного числа точек вырожденных отрезков Δ_k, выполняется неравенство $f_{cm}(x) \ge 1$ и следовательно,

$$\overline{I}(f)=\inf_{f_{cm}\ge f}\int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,1]}(x)dx=1.$$

С другой стороны, если ступенчатая функция f_{cm} удовлетворяет неравенству $f_{cm} \le f$, то $f \le 0$ и следовательно,

$$\underline{I}(f)=\sup_{f_{cm}\le f}\int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx=\int_{\mathbb{R}}0dx=0.$$

Таким образом, $0 = \underline{I}(f) < \overline{I}(f) = 1$ и поэтому функция f не интегрируема по Риману.

Заметим, что из определения 4 следует, что финитные ограниченные функции f и $-f$ одновременно интегрируемы или не интегрируемы по Риману. Действительно, если функция f интегрируема по Риману, то

$$\overline{I}(f)=\underline{I}(f)\ \Rightarrow\ \overline{I}(-f)=-\underline{I}(f)=-\overline{I}(f)=\underline{I}(-f),$$

что означает интегрируемость по Риману функции $-f$. С другой стороны, если функция $(-f)$ интегрируема по Риману, то функция $-(-f) = f$ также интегрируема по Риману, что доказывает одновременную интегрируемость по Риману функций f и $-f$.

Лекция 22

1. Линейность интеграла Римана

Покажем, что интеграл Римана инвариантен относительно линейных операций.

Теорема 1. *Пусть функции f и g интегрируемы по Риману и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда функции αf и $f + g$ интегрируемы по Риману и справедливы формулы*

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha f(x)dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функций f и g гарантирует равенства

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f), \qquad \overline{I}(g) = \underline{I}(g).$$

Начнем доказательство с операции умножения f на скаляр α.

Если $\alpha = 0$, то утверждение теоремы 1 очевидно.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\overline{I}(\alpha f) = \alpha \ \overline{I}(f)$$

и

$$\underline{I}(\alpha f) = -\overline{I}(-\alpha f) = -\alpha\overline{I}(-f) = \alpha\underline{I}(f).$$

Равенство правых частей в двух последних соотношениях ведет к равенству их левых частей, что доказывает интегрируемость функции αf. Одновременно первое из соотношений дает первую формулу из утверждения теоремы 1.

Пусть теперь $\alpha < 0$. Тогда

$$\overline{I}(\alpha f) = \overline{I}(-|\alpha| f) = |\alpha|\overline{I}(-f) = -|\alpha|\underline{I}(f) = \alpha\underline{I}(f)$$

и

$$\underline{I}(\alpha f) = \underline{I}(-|\alpha| f) = -\overline{I}(|\alpha| f) = -|\alpha|\overline{I}(f) = \alpha\overline{I}(f).$$

Равенство правых частей в двух последних соотношениях ведет к равенству их левых частей, что доказывает интегрируемость функции αf. Одновременно два крайних звена первого из соотношений дают первую формулу из утверждения теоремы 1.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 1. Свойства верхнего интеграла выражаются в неравенствах

$$\overline{I}(f+g) \le \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$$

и

$$\underline{I}(f+g) = -\overline{I}(-f-g) \ge -\overline{I}(-f) - \overline{I}(-g) = \underline{I}(f) + \underline{I}(g).$$

Равенство правых частей двух последних соотношений ведет к неравенству

$$\overline{I}(f+g) \le \underline{I}(f+g),$$

в котором возможен лишь знак равенства. Следовательно,

$$\overline{I}(f+g) = \underline{I}(f+g),$$

что доказывает интегрируемость суммы $f+g$. Последний вывод получен как следствие неравенств, выражающих свойства верхнего интеграла. Знак равенства на последней стадии возможен лишь в случаях наличия знака равенства во всех предыдущих неравенствах. Следовательно, например,

$$\overline{I}(f+g) = \overline{I}(f) + \overline{I}(g),$$

что равносильно второй формуле из утверждения теоремы 1 и заканчивает доказательство теоремы 1.

2. Монотонность интеграла Римана

Монотонность интеграла Римана выражается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть функции f и g интегрируемы по Риману и для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Доказательство. В действительности, свойством монотонности обладает верхний интеграл, а следовательно, и интеграл Римана. Прежде всего заметим, что неравенство $f(x) \le g(x)$ влечет условие соотношения между множествами ступенчатых функций

$$\{f_{cm}:\ f_{cm} \ge f\} \supset \{f_{cm}:\ f_{cm} \ge g\}.$$

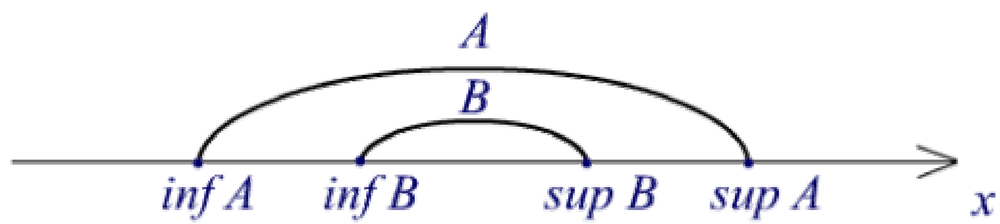


Рис. 1. Иллюстрация к доказательству монотонности интеграла Римана.

Нижняя грань

$$\overline{I}(f) = \inf_{f_{cm} \geq f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx$$

большего множества не превышает нижней грани

$$\overline{I}(g) = \inf_{f_{cm} \geq g} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx$$

его подмножества, то есть

$$\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g),$$

что влечет утверждение теоремы 2 и заканчивает его доказательство.

3. Аддитивность интеграла Римана

Определим интеграл Римана по множеству E.

Определение 1. *Финитная ограниченная функция f называется интегрируемой по Риману на множестве E, если произведение $f\chi_E$ интегрируемо по Риману. В этом случае интеграл Римана от функции $f\chi_E$ называется интегралом Римана от функции f на множестве E и обозначается*

$$\int_E f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_E f(x)dx = \int_E (f\chi_E)(x)dx.$$

Определение 1 может быть отнесено и к функциям, заданным только на множестве E.

В частности, если множество E является одним из промежутков $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ или (a, b), то интеграл от функции f на множестве E обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Следующая теорема выражает свойство аддитивности интеграла Римана.

Теорема 3. *Если функция f интегрируема по Риману на взаимно непересекающихся множествах E_1 и E_2, то f интегрируема на объединении $E = E_1 \cup E_2$ и справедлива формула*

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на множествах E_1 и E_2 означает, что функции $f\chi_{E1}$ и $f\chi_{E2}$ интегрируемы по Риману. Так как E_1 и E_2 взаимно не пересекаются, то

$$\chi_{E1\cup E2} = \chi_{E1} + \chi_{E2}.$$

Следовательно, функция $f\chi_E$ интегрируема по Риману, что означает интегрируемость функции f на множестве E и заканчивает доказательство теоремы 3.

4. Интегрируемость модуля интегрируемой функции

Покажем, что модуль интегрируемой функции также является интегрируемой функцией.

Теорема 4. *Пусть функция f интегрируема по Риману. Тогда функция $|f|$ также интегрируема по Риману и справедливо неравенство*

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции f означает равенство

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f).$$

По свойству верхней грани в определении нижнего интеграла

$$\underline{I}(f) = \sup_{f_{cm} \le f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx$$

для всякого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция $f_1 \le f$ такая, что

(1) $$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx > \underline{I}(f) - \varepsilon.$$

Аналогично по свойству нижней грани для верхнего интеграла

$$\overline{I}(f) = \inf_{f_{cm} \ge f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx$$

найдется ступенчатая функция $f_2 \ge f$ такая, что

(2) $$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx < \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

Вычитая неравенство (1) из неравенства (2), видим, что

$$\int_{\mathbb{R}} (f_2 - f_1)(x)dx < 2\varepsilon, \qquad f_1 \le f \le f_2.$$

Положительные части f_1^+ и f_2^+ ступенчатых функций f_1 и f_2 остаются ступенчатыми функциями, при этом сохраняются неравенства

$$f_1^+ \le f^+ \le f_2^+.$$

Покажем, что

(3) $$f_2^+ - f_1^+ \le f_2 - f_1.$$

Действительно,

$$\text{если}\quad 0 \le f_1(x) \le f_2(x),\quad \text{то}\quad f_2^+(x) - f_1^+(x) = f_2(x) - f_1(x);$$

$$\text{если}\quad f_1(x) \le f_2(x) \le 0,\quad \text{то}\quad f_2^+(x) - f_1^+(x) = 0 \le f_2(x) - f_1(x);$$

$$\text{если}\quad f_1(x) \le 0 \le f_2(x),\quad \text{то}\quad f_2^+(x) - f_1^+(x) = f_2(x) \le f_2(x) - f_1(x).$$

Таким образом, неравенство (3) проверено во всех возможных случаях соотношений между f_1, f_2, f_1^+ и f_2^+.

Теперь произведем оценки нижнего и верхнего интегралов от функции f^+

(4) $$\underline{I}(f) = \sup_{f_{cm} \le f^+} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx \ge \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x)dx,$$

(5) $$\overline{I}(f) = \inf_{f_{cm} \ge f^+} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} f_2^+(x)dx.$$

Вычитая неравенство (4) из неравенства (5), видим, что

$$\overline{I}(f^+) - \underline{I}(f^+) \le \int_{\mathbb{R}} f_2^+(x)dx - \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x)dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} (f_2^+ - f_1^+)(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} (f_2 - f_1)(x)dx < 2\varepsilon.$$

Осталось в этом неравенстве перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, чтобы получить неравенство

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le 0,$$

в котором возможен только знак равенства

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) = 0,$$

что доказывает интегрируемость функции f^+.

Применяя те же рассуждения к функции $(-f)$, приходим к утверждению об интегрируемости функции $(-f)^+ = f^-$. Вместе эти два свойства дают интегрируемость функции

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Пользуясь монотонностью и линейностью интеграла Римана и неравенствами

$$f \le |f| \quad \text{и} \quad -f \le |f|,$$

получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} |f|(x)dx \qquad \text{и} \qquad -\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} |f|(x)dx,$$

что равносильно неравенству

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f|(x)dx$$

и заканчивает доказательство теоремы 4.

Лекция 23

1. Интегральные суммы Римана

Вернемся к геометрическому подходу в теории интеграла Римана. Конструкция нижнего и верхнего интегралов вдохновлялась идеей достижения верхней грани сумм площадей прямоугольников, вписанных в криволинейную трапецию, и нижней грани сумм площадей прямоугольников, описанных около криволинейной трапеции.

Промежуточное положение прямоугольников возникает в случае пересечения их верхних сторон с графиком функции.

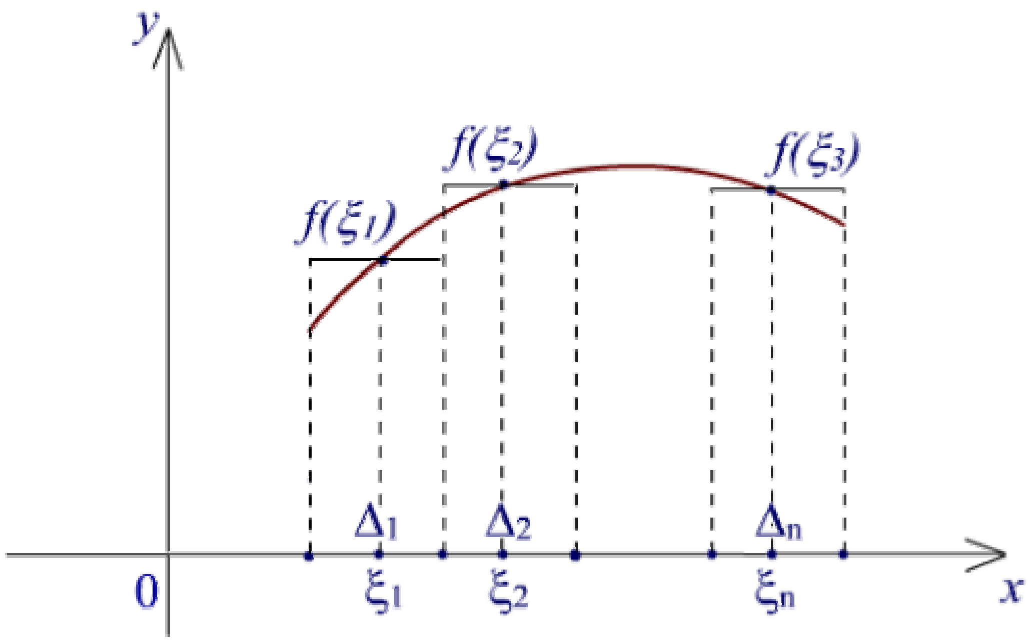


Рис. 1. Геометрическое представление интеграла Римана

Аналитически пересечение ступеньки с графиком функции f означает, что высота ступеньки равна значению $f(\xi)$ функции f в некоторой точке ξ. Набор ступенек над отрезком $[a, b]$ предполагает разбиение отрезка $[a, b]$ на части.

<u>Определение 1.</u> *Набор* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ *точек* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ *называется разбиением отрезка* $[a, b]$.

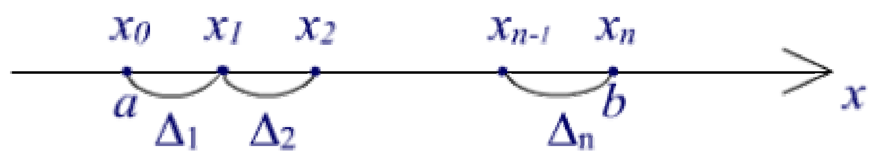


Рис. 2. Разбиение отрезка

Имея разбиение отрезка $[a, b]$, мы представим $[a, b]$ как объединение отрезков $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$,

$$[a, b] = \cup k{=}1n\Delta_k.$$

Эти отрезки попарно не пересекаются, за исключением точек деления $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, которые являются крайними точками двух соседних отрезков.

Метрической характеристикой разбиения служит максимальная длина отрезков Δ_k.

<u>Определение 2.</u> *Пусть* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ - *разбиение отрезка* $[a, b]$. *Тогда число*

$$\lambda = \max 1 \le k \le n\ (x_k - x_{k-1})$$

называется диаметром разбиения P. *Будем обозначать диаметр разбиения символом* diam P.

Реализуем геометрическую идею построения промежуточных прямоугольников в следующем аналитическом определении.

<u>Определение 3.</u> *Пусть дано разбиение* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ *отрезка* $[a, b]$ *и набор* $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ *точек* $\xi_k \in \Delta_k$, $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$. *Если функция* f *определена на отрезке* $[a, b]$, *то сумма*

$$S(P, \Xi; f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|,$$

где $|\Delta_k| = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$, *называется интегральной суммой функции* f, *соответствующей разбиению* P *и набору* Ξ.

В обозначении указано, что интегральная сумма функции f зависит от разбиения P и набора точек Ξ. Можно ожидать, что для интегрируемой функции f интегральная сумма приближается к интегралу от функции f при некотором процессе регулирования разбиения P или набора Ξ. Мы увидим в дальнейшем, что вполне достаточно делать разбиение бесконечно мелким независимо от выбранного набора точек Ξ.

Другими словами, мы намереваемся найти предел интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю. Сначала опишем такой предельный переход, опираясь на стандартное понятие предела функции S, зависящей от диаметра разбиения λ. Поскольку $\lambda > 0$, то по существу мы опишем односторонний предел при $\lambda \to +0$.

Пусть P - разбиение отрезка $[a, b]$ и $\lambda = \operatorname{diam} P$. Тогда число I является пределом интегральной суммы при $\lambda \to 0$, $I = \lim\lambda \to 0 S(P, \Xi; f)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P\ \forall \Xi \quad 0 < \lambda < \delta \Rightarrow |S(P, \Xi; f) - I| < \varepsilon.$$

Разумеется, функция f в процессе предельного перехода считается заданной, зато разбиение отрезка $[a, b]$ и набор Ξ меняются. При этом конкретный выбор точек разбиения оказывается несущественным, как и выбор точек набора Ξ, а важной оказывается лишь бесконечная малость диаметра λ.

2. Критерий интегрируемости функции по Риману

Покажем, что возможность предельного перехода в интегральной сумме при диаметре разбиения, стремящемся к нулю, равносильна интегрируемости по Риману функции f.

Теорема 1. *Функция* f *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда ее интегральные суммы, соответствующие разбиениям* $[a, b]$, *имеют предел при диаметре разбиения* λ, *стремящемся к нулю, независимо от выбора конкретного разбиения и от набора точек* Ξ. *В этом случае предел* I *интегральных сумм равен интегралу Римана от функции* f *на отрезке* $[a, b]$

$$I = \lim_{\lambda \to 0} S(P, \Xi; f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Теорема 1 выражает необходимое и достаточное условие интегрируемости функции f через свойство ее интегральных сумм.

Начнем с доказательства необходимости утверждения. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Покажем, что ее интегральные суммы имеют предел при $\lambda \to 0$.

Интегрируемая функция f ограничена, что означает выполнение неравенства $|f(x)| \leq M$ на отрезке $[a, b]$ с некоторым M. Интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$ равносильна интегрируемости функции $f\chi_{[a,\, b]}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $f = 0$ вне $[a, b]$, иначе $f\chi_{[a,\, b]}$ переобозначим через f. По определению интегрируемости имеем равенства

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

По свойству нижней грани в определении

$$\overline{I}(f) = \inf_{f_{cm} \geq f} \int_{\mathbb{R}} f_{cm}(x)dx$$

для всякого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция $f_1 \geq f$ такая, что

(1) $$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx < \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

Пусть функция f_1 имеет представление

(2) $$f_1 = m \sum j=1 \; \lambda_j \chi_{\Delta' j}$$

с непересекающимися промежутками $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_m'$.

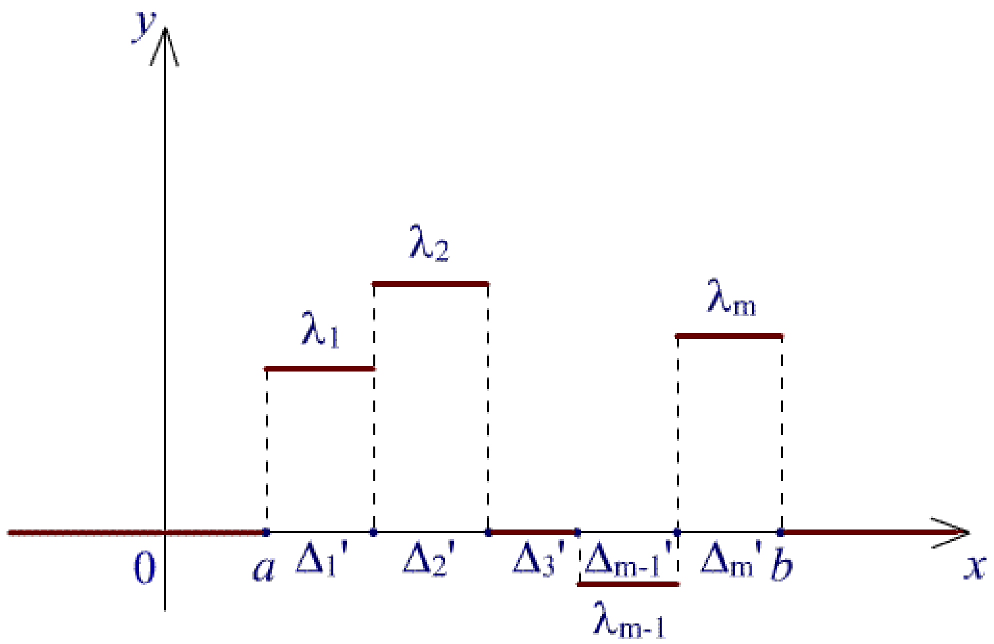


Рис. 3. Функция $f_1 = \sum m\ j{=}1 \lambda_j \chi_{\Delta' j}$.

Можно считать, что все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ не превосходят M, в противном случае заменим на M те из коэффициентов, которые превосходят M, с сохранением неравенств (1) и $f_1 \geq f$ для измененной функции f_1. Кроме того, можно считать, что

$$\bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j' = [a,b],$$

в противном случае заменим все Δ_j' на $\Delta_j' \cap [a, b]$, а часть отрезка $[a, b]$, непокрытую объединением промежутков Δ_j', представим в виде объединения конечного числа промежутков, чьи характеристические функции внесем в сумму (2) с нулевыми коэффициентами.

Если среди $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_m'$ обнаружатся отрезки, вырожденные в точку, то мы расширим их до невырожденных отрезков. Действительно, пусть отрезки $\Delta_{j1}', \Delta_{j2}', \ldots, \Delta_{jp}'$ вырождаются в точки $c_1, c_2, \ldots, c_p$ соответственно. Каждый из них граничит с некоторым соседним промежутком. Предположим, что $\Delta_{j1}' = \{c_1\}$ граничит, например, с $\Delta_j' = (c_1, x_j')$. Выберем в Δ_j' точку c_1', $c_1' - c_1 = \delta_1$, где $\delta_1 < \varepsilon / p$, и заменим

$$\{c_1\} \cup \Delta_j' \quad \text{на} \quad [c_1, c_1'] \cup (c_1', x_j'),$$

а слагаемые

$$\lambda_{j_1}\chi_{\{c_1\}} + \lambda_j \chi_{\Delta_j'}$$

в представлении (2) заменим на

$$M\chi_{[c_1, c_1']} + \lambda_j \chi_{(c_1', x_j')}.$$

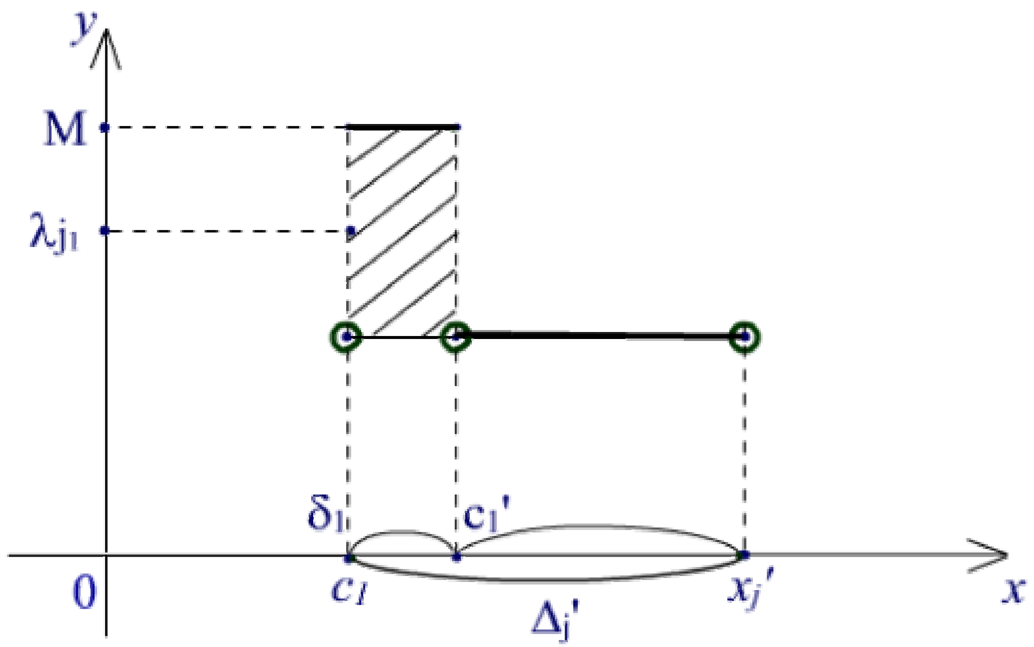


Рис. 4. Иллюстрация к доказательству критерия интегрируемости функции по Риману

Тогда сумма интегралов

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda_{j_1} \chi_{\{c_1\}}(x)dx + \int_{\mathbb{R}} \lambda_j \chi_{\Delta_j{}'}(x)dx = \lambda_j |\Delta_j{}'|,$$

входящая в формулу (1), заменится на сумму интегралов

$$\int_{\mathbb{R}} M\chi_{[c_1, c_1{}']}(x)dx + \int_{\mathbb{R}} \lambda_j \chi_{(c_1{}', x_j{}')}(x)dx = M\delta_1 + \lambda_j \left(|\Delta_j{}'| - \delta_1\right).$$

Разность между второй и первой суммами интегралов составляет

$$(M - \lambda_j)\delta_1 \le 2M\delta_1 < \frac{2M\varepsilon}{p}.$$

Поэтому после совершенной замены интеграл в левой части (1) увеличится на число, не превышающее значения $2M\varepsilon/p$.

Аналогично расширим остальные вырожденные отрезки $\{c_2\}, \ldots, \{c_p\}$, изменив функцию f_1, при этом после совершения всех изменений интеграл в левой части (1) увеличится на число, не превышающее значения $2M\varepsilon$.

Сохраним за измененной функцией f_1 ее прежнее обозначение f_1. Неравенство (1) теперь заменится на неравенство

(3) $$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx < \bar{I}(f) + \varepsilon + 2M\varepsilon = \bar{I}(f) + (1 + 2M)\varepsilon.$$

Создадим произвольное разбиение $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ отрезка $[a, b]$ с диаметром λ таким, что

$$\lambda = \max 1 \le k \le n\, |\Delta_k| = \max 1 \le k \le n\, (x_k - x_{k-1}) < \min 1 \le j \le m\, |\Delta_j'| = \lambda_0,$$

и выберем произвольно набор Ξ точек $\xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Составим интегральную сумму

$$S(P, \Xi; f) = n \sum k{=}1\, f(\xi_k)|\Delta_k|.$$

Произведем наложение двух разбиений, обозначив

$$\Delta''_{kj} = \Delta_k \cap \Delta'_j, \quad 1 \le k \le n; \qquad 1 \le j \le m.$$

Среди промежутков Δ''_{kj} встречаются пустые множества. Очевидно, что

$$\Delta_k = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta''_{kj}, \qquad |\Delta_k| = \sum_{j=1}^{m} |\Delta''_{kj}|, \qquad k = 1,2,\dots,m,$$

и

$$\Delta'_j = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta''_{kj}, \qquad |\Delta_j| = \sum_{k=1}^{n} |\Delta''_{kj}|, \qquad j = 1,2,\dots,m.$$

Следовательно,

$$S(P,\Xi;f) - \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) - \lambda_j)|\Delta''_{kj}|. \tag{4}$$

Поскольку самый длинный из промежутков Δ_k меньше самого короткого из промежутков Δ'_j, то для заданного k либо Δ_k содержится в некотором Δ'_{j_k} и в этом случае $\Delta''_{kj_k} = \Delta_k$ и $f(\xi_k) \le \lambda_{j_k}$, а остальные Δ''_{kj}, $j \ne j_k$, - пустые множества, либо Δ_k содержится в объединении двух соседних промежутков $\Delta'_j \cup \Delta'_{j+1}$, пересекаясь с каждым из них.

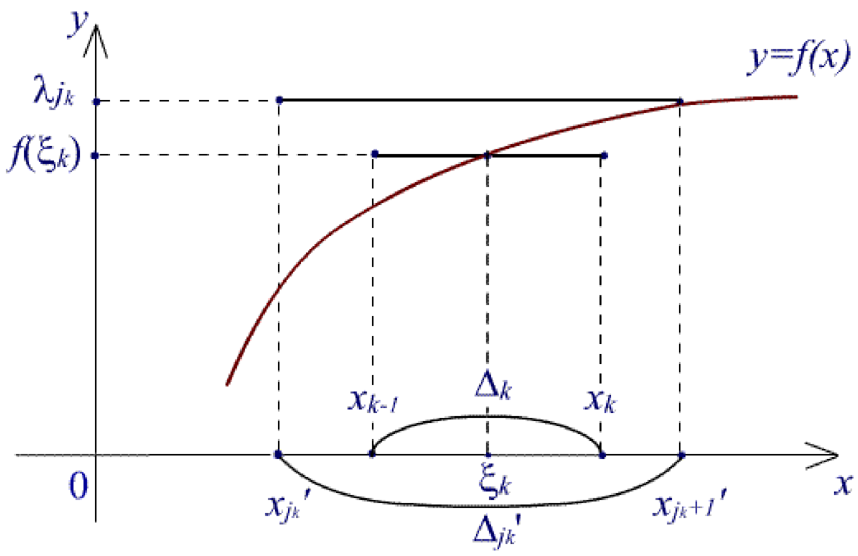


Рис. 5. Случай включения Δ_k в некоторый Δ'_{jk}.

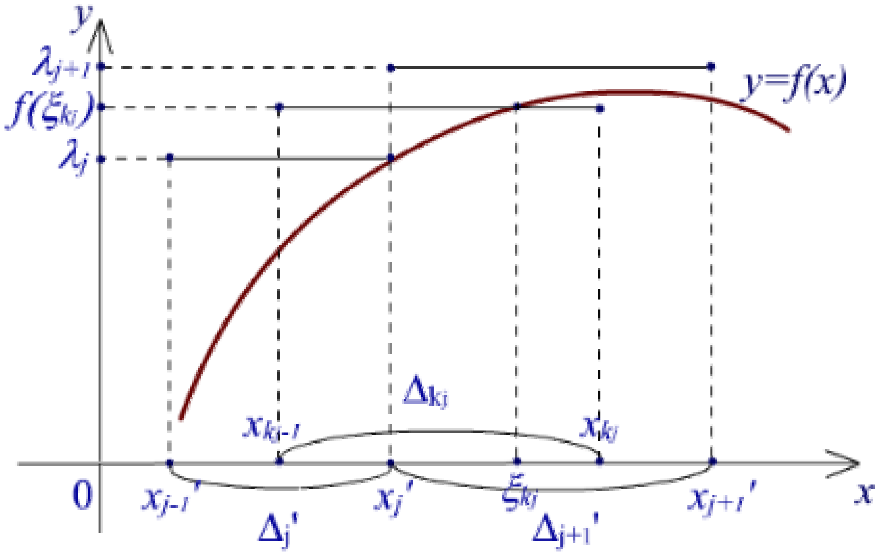


Рис. 6. Случай включения Δ_k в объединение двух соседних промежутков $\Delta'_j \cup \Delta'_{j+1}$

Промежутков Δ_k второго случая не может быть больше, чем $(m-1)$. Точнее, каждому $j = 1, 2, ..., m-1$ соответствует не больше одного $k = k_j$ такого, что Δ_{k_j} содержится в объединении промежутков $\Delta'_j \cup \Delta'_{j+1}$, пересекаясь с каждым из них. Тогда из (4) получаем неравенство

(5) $$S(P,\Xi;f)-\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx \le \sum_{j=1}^{m-1}(f(\xi_k)-\lambda_j)(|\Delta''_{k_j j}|+|\Delta''_{k_j(j+1)}|) < \sum_{j=1}^{m-1} 2M\lambda = 2M(m-1)\lambda.$$

Вдобавок к неравенству $\lambda < \lambda_0$ потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\lambda < \varepsilon/2M(m-1)$, другими словами,

$$\lambda < \min\left\{\lambda_0, \frac{\varepsilon}{2M(m-1)}\right\} = \delta'.$$

Принимая во внимание неравенства (3) и (5), приходим к условию

$$S(P,\Xi;f) < \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx + 2M(m-1)\lambda < \overline{I}(f) + (1+2M)\varepsilon + \varepsilon = \overline{I}(f) + 2(1+M)\varepsilon.$$

Симметричными рассуждениями докажем, что существует δ>0 такое, что для всех λ, $0 < \lambda < \delta''$, выполняется условие

$$S(P, \Xi; f) > \underline{I}(f) - 2(1 + M)\varepsilon.$$

Положив $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ и заменив $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ на интеграл Римана от функции f, запишем два последних условия в следующем виде

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall P \forall\Xi \; 0 < \lambda < \delta \Rightarrow \left|S(P,\Xi;f) - \int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right| < 2(1+M)\varepsilon,$$

что равносильно условию

$$\lim_{\lambda\to 0} S(P,\Xi;f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

и доказывает необходимость утверждения теоремы 1.

Перейдем к доказательству достаточности утверждения теоремы 1. Пусть

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \; \forall P \; \forall\Xi \quad 0 < \lambda < \delta \Rightarrow |S(P, \Xi; f) - I| < \varepsilon.$$

Покажем, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Выберем произвольно разбиение $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ отрезка $[a, b]$ с диаметром $\lambda < \delta$ и положим $\Delta_1 = [x_0, x_1]$, $\Delta_2 = (x_1, x_2]$, ..., $\Delta_n = (x_{n-1}, x_n]$. Тогда для любого набора точек $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| - I\right| < \varepsilon.$$

Пусть

$$m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x), \qquad M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

По свойству граней множества для любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $\xi'_k \in \Delta_k$ и $\xi''_k \in \Delta_k$ такие, что

$$f(\xi'_k) < m_k + \varepsilon \quad \text{и} \quad f(\xi''_k) > M_k - \varepsilon.$$

Положим

$$f_1 = \sum_{k=1}^{n} m_k \chi_{\Delta_k} \text{ и } f_2 = \sum_{k=1}^{n} M_k \chi_{\Delta_k}.$$

Обе функции f_1 и f_2 - ступенчатые, $f_1 \le f \le f_2$ и

$$\underline{I}(f) = \sup_{f_{\text{ст}} \le f} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \ge \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{n} m_k |\Delta_k| > \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k') - \varepsilon)|\Delta_k| = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')|\Delta_k| - \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k| > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a) = I - (1+b-a)\varepsilon$$

и

$$\overline{I}(f) = \inf_{f_{\text{ст}} \ge f} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx = \sum_{k=1}^{n} M_k |\Delta_k| < \sum_{k=1}^{n} (f(\xi''_k) + \varepsilon)|\Delta_k| = \sum_{k=1}^{n} f(\xi''_k)|\Delta_k| + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k| < I + \varepsilon + \varepsilon(b-a) = I + (1+b-a)\varepsilon.$$

Вычитая первое неравенство из второго, получим неравенство

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) < 2(1 + b - a)\varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к неравенству

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le 0,$$

в котором возможен только знак равенства, что доказывает интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$. Совпадение предела I с интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ следует из необходимости утверждения и заканчивает доказательство теоремы 1.

Лекция 24

1. Первая теорема о среднем для интеграла Римана

Докажем так называемую первую теорему о среднем.

Теорема 1 *Пусть функция f интегрируема по Риману и равна нулю вне отрезка* $[a, b]$, *а для всех* $x \in [a, b]$ *выполняются неравенства*

$$m \le f(x) \le M.$$

Тогда справедливы неравенства

$$m(b-a) \le \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \le M(b-a).$$

Если, кроме того, функция f непрерывна на $[a, b]$, *то найдется точка* $c \in [a, b]$ *такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = f(c)(b-a)$$

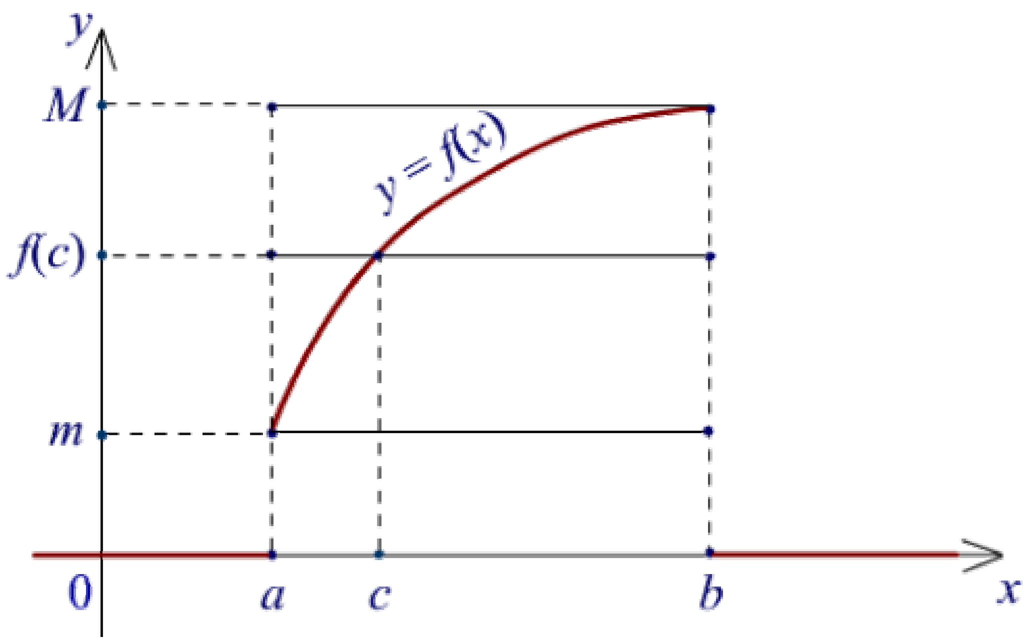


Рис. 1. Иллюстрация к теореме о об интегрируемости монотонной функции по Риману

Доказательство. Первое утверждение теоремы 1 справедливо для верхнего интеграла, что было доказано в лекции 21. А поскольку для интегрируемой функции f

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

то доказанное неравенство переносится и на интеграл от функции f.

Пусть теперь функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$m = \min x \in [a, b]\ \ f(x) \quad \text{и} \quad M = \max x \in [a, b]\ \ f(x).$$

По доказанному справедливы неравенства

$$m \le \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)dx}{b-a} \le M.$$

Обозначим

$$\mu = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)dx}{b-a}$$

По теореме Коши о промежуточном значении непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f принимает на этом отрезке все значения между минимальным и максимльным, то есть найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$. Это равенство равносильно второму утверждению теоремы 1 и заканчивает ее доказательство.

2. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции

В этой части мы открываем цикл теорем, демонстрирующих многообразие интегрируемых по Риману функций. С одной стороны, мы знаем, что интегрируемые функции существуют. Например, все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. С другой стороны, как было показано в лекции 21 на примере функции Дирихле, существуют финитные ограниченные функции, которые не интегрируемы по Риману. Заметим, что функция Дирихле разрывна в каждой точке отрезка, вне которого она тождественно равна нулю.

Найдем простые достаточные условия, которые гарантируют интегрируемость функции. Важнейшей из этого цикла является следующая теорема, устанавливающая связь между фундаментальными для математического анализа свойствами функции - непрерывностью и интегрируемостью.

Теорема 2 *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то f интегрируема по Риману на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Покажем, что f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то есть функция $f\chi_{[a, b]}$ интегрируема по Риману. Не ограничивая общности, можем считать, что f равна нулю вне $[a, b]$. При этом непрерывность функции f в крайних точках a и b отрезка $[a, b]$ понимается в одностороннем смысле: f непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

По теореме Кантора непрерывная на отрезке функция является равномерно непрерывной, что означает

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x, x' \in [a, b]\ |\ x - x'\ | < \delta \Rightarrow |\ f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Создадим разбиение $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ отрезка $[a, b]$ таким образом, чтобы длина каждого из отрезков $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, была меньше δ. По второй теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке Δ_k функция f достигает минимума и максимума, поэтому найдутся точки ξ_k', $\xi_k'' \in \Delta_k$ такие, что

$$f(\xi_k') = \min x \in \Delta_k f(x), \qquad f(\xi_k'') = \max x \in \Delta_k f(x).$$

Благодаря равномерной непрерывности выполняется неравенство

$$f(\xi_k'') - f(\xi_k') < \varepsilon.$$

Построим функции f_1 и f_2 по формулам

$$f_1(x) = \begin{cases} f(\xi'_1), & \text{если } x_0 \le x \le x_1 \\ f(\xi'_2), & \text{если } x_1 \le x \le x_2 \\ \ldots\ldots & \\ f(\xi'_n), & \text{если } x_{n-1} \le x \le x_n, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(\xi\{''_1), & \text{если } x_0 \le x \le x_1 \\ f(\xi''_2), & \text{если } x_1 \le x \le x_2 \\ \ldots\ldots & \\ f(\xi''_n), & \text{если } x_{n-1} \le x \le x_n. \end{cases}$$

Обе функции f_1 и f_2 - ступенчатые и удовлетворяют неравенствам

$$f_1 \le f \le f_2.$$

По свойству верхней грани в определении нижнего интеграла

$$\underline{I}(f) = \sup_{f\text{ст} \le f} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \ge \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')|\Delta_k|.$$

Аналогично по свойству нижней грани в определении верхнего интеграла

$$\overline{I}(f) = \inf_{f_{\text{ст}} \ge f} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'')|\Delta_k|.$$

Вычитая первое неравенство из второго, получим

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le \sum_{k=1}^{n} (f(\xi''_k) - f(\xi'_k))|\Delta_k| < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon|\Delta_k| = \varepsilon(b-a).$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, придем к неравенству

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le 0$$

в котором возможен лишь знак равенства, что доказывает интегрируемость по Риману функции f и заканчивает доказательство теоремы 2.

Теорема 2 позволяет увидеть более точную связь условий в теореме 1, в первой части которой функция f предполагалась интегрируемой по Риману и равной нулю вне отрезка $[a, b]$, а во второй части, кроме того, непрерывной на $[a, b]$. По теореме 2 теперь можем убрать слова "кроме того", так как условие непрерывности на отрезке оказывается более сильным по сравнению с интегрируемостью.

3. Интегрируемость монотонной на отрезке функции

Докажем, что монотонная на отрезке функция интегрируема по Риману на этом отрезке.

Теорема 3 *Если функция f монотонна на отрезке* $[a, b]$, *то f интегрируема по Риману на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть функция f монотонна на отрезке $[a, b]$. Предположим, что функция f не убывает на $[a, b]$. В случае невозрастающей функции f рассуждения симметричны. Покажем, что f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то есть функция $f\chi_{[a,b]}$ интегрируема по Риману. Не ограничивая общности, можем считать, что f равна нулю вне $[a, b]$.

Создадим разбиение $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ отрезка $[a, b]$, в котором длины всех отрезков $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, одинаковы и равны $(b - a)/n$. Этого можно добиться, положив

$$x_k = x_0 + \frac{b-a}{n}k, k = 0,1,2...n,$$

В силу монотонности на каждом из отрезков Δ_k

$$f(x_{k-1}) = \min x \in \Delta_k\ f(x), \qquad f(x_k) = \max x \in \Delta_k\ f(x), \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Построим функции f_1 и f_2 по формулам

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x_0), \text{ если } x_0 \le x \le x_1 \\ f(x_1), \text{ если } x_1 \le x \le x_2 \\ \dots\dots\dots \\ f(x_{n-1}), \text{ если } x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x_1), \text{ если } x_0 \le x \le x_1 \\ f(x_2), \text{ если } x_1 \le x \le x_2 \\ \dots\dots\dots \\ f(x_n), \text{ если } x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

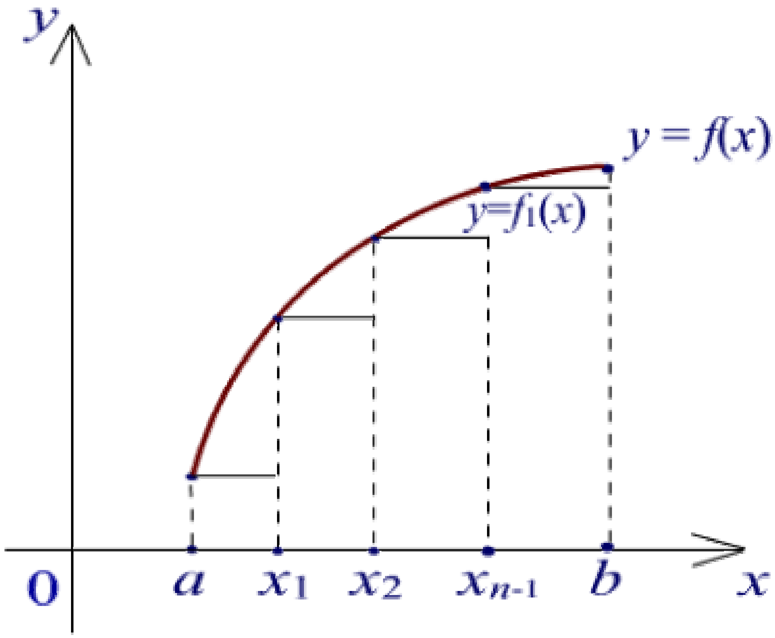


Рис. 2. Иллюстрация к теореме о среднем для интеграла Римана при $m \le f(x)$

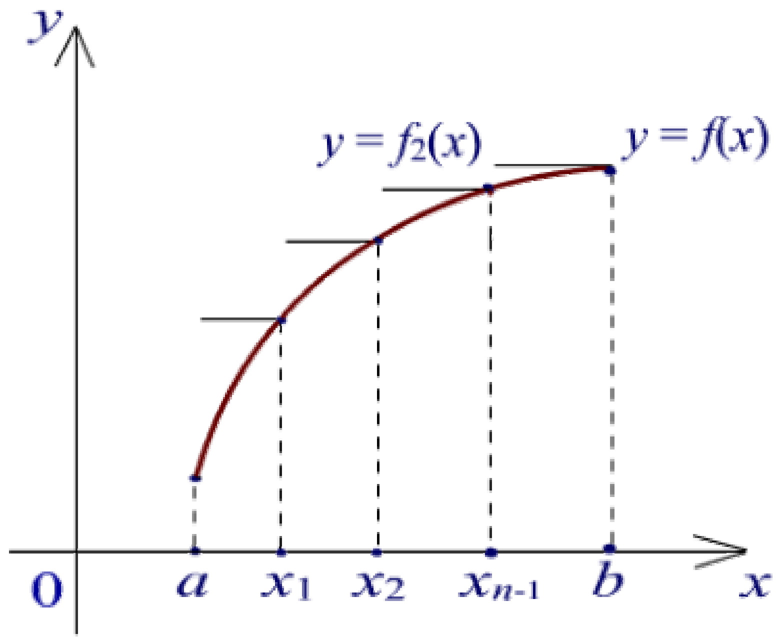


Рис. 3. Иллюстрация к теореме о среднем для интеграла Римана при $f(x) \le M$.

Обе функции f_1 и f_2 - ступенчатые и удовлетворяют неравенствам

$$f_1 \le f \le f_2.$$

По свойству верхней грани в определении нижнего интеграла

$$\underline{I}(f) = \sup_{f_{\text{ст}} \le f} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \ge \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})|\Delta_k|.$$

Аналогично по свойству нижней грани в определении верхнего интеграла

$$\overline{I}(f) = \inf_{f\text{ст} \geq f} \int\limits_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}} f_2(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)|\Delta_k|.$$

Вычитая первое неравенство из второго, получим

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))|\Delta_k| = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$\frac{b-a}{n}[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})] =$$

$$\frac{b-a}{n}[f(x_n) - f(x_0)] = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)].$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, придем к неравенству

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq 0,$$

в котором возможен лишь знак равенства, что доказывает интегрируемость по Риману функции f и заканчивает доказательство теоремы 3.

4. Интегрируемость произведения интегрируемых функций

Покажем, что свойство интегрируемости по Риману инвариантно относительно операции умножения функций.

Теорема 4. *Если функции f и g интегрируемы по Риману, то произведение fg также интегрируемо по Риману.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема по Риману. Покажем сначала, что функция f^2 также интегрируема по Риману. Интегрируемая функция f финитна и ограничена и функция $|f|$ также интегрируема, равна нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$ и во всех точках удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leq M$.

По свойству верхней грани в определении нижнего интеграла

$$\underline{I}(|f|) = \sup_{f_{\text{ст}} \le |f|} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx$$

для всякого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция $f_1 \le |f|$ такая, что

(1) $$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx > \underline{I}(|f|) - \varepsilon.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $f_1 \ge 0$, иначе заменим функцию f_1 на ступенчатую функцию $f_1^+ \ge f_1$ с сохранением неравенства $f_1^+ \le |f|$ и неравенства (1) для функции f_1^+.

Аналогично по свойству нижней грани в определении верхнего интеграла

$$\overline{I}(|f|) = \inf_{f_{\text{ст}} \ge |f|} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx$$

найдется ступенчатая функция $f_2 \ge |f|$ такая, что

(2) $$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx < \overline{I}(|f|) + \varepsilon.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $f_2 \le M$, иначе заменим функцию f_2 на ступенчатую функцию $f_{2M} = \min\{f_2, M\} \le f_2$ с сохранением неравенства $f_{2M} \ge |f|$ и неравенства (2) для функции f_{2M}.

Принимая во внимание равенство

$$\overline{I}(|f|) = \underline{I}(|f|),$$

вычитаем неравенство (1) из неравенства (2) и получаем

(3) $$\int_{\mathbb{R}} (f_2 - f_1)(x)dx < 2\varepsilon.$$

Из неравенств

$$0 \le f_1 \le |f| \le f_2 \le M$$

следуют неравенства

$$0 \le f_1^2 \le f^2 \le f_2^2 \le M^2$$

со ступенчатыми функциями f_1^2 и f_2^2. По свойству верхней грани для нижнего интеграла выводим неравенство

$$\underline{I}(f^2) = \sup_{f_{\text{ст}} \le f^2} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \ge \int_{\mathbb{R}} f_1^2(x)dx,$$

а по свойству нижней грани для верхнего интеграла выводим неравенство

$$\overline{I}(f^2) = \inf_{f_{\text{ст}} \ge f^2} \int_{\mathbb{R}} f_{\text{ст}}(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} f_2^2(x)dx.$$

Вычитая первое неравенство из второго, получаем

$$\overline{I}(f^2) - \underline{I}(f^2) \le \int_{\mathbb{R}} (f_2^2 - f_1^2)(x)dx.$$

Так как

$$f_2^2 - f_1^2 = (f_2 - f_1)(f_2 + f_1) \le 2M(f_2 - f_1),$$

то последнее неравенство с учетом (3) приводит к условию

$$\overline{I}(f^2) - \underline{I}(f^2) \le 2M \int_{\mathbb{R}} (f_2 - f_1)(x)dx < 4M\varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство

$$\overline{I}(f^2) - \underline{I}(f^2) \le 0,$$

в котором возможен только знак равенства, что доказывает интегрируемость по Риману функции f^2.

Для доказательства основного утверждения теоремы 4 воспользуемся формулой $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$, из которой находим, что

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}.$$

Если функции f и g интегрируемы по Риману, то функции $f+g, f^2, g^2$ интегрируемы по Риману, а следовательно, и функция fg интегрируема по Риману, что заканчивает доказательство теоремы 4.

Лекция 25

1. Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим важное понятие математического анализа - так называемый интеграл с переменным пределом интегрирования.

Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Значит, произведение $f\chi_{[a, b]}$ интегрируемо по Риману. Выберем произвольно точку $c \in [a, b]$ и рассмотрим отрезок $[a, c] \subset [a, b]$. Его характеристическая функция $\chi_{[a, c]}$ интегрируема по Риману, а следовательно, и произведение $f\chi_{[a, b]}\chi_{[a, c]} = f\chi_{[a, c]}$ интегрируемо. Это означает, что функция f интегрируема на отрезке $[a, c]$.

Заметим, что допустимо выбрать $c = a$. В этом случае $f\chi_{[a, a]}$ представляет собой ступенчатую функцию, принимающую значение $f(a)$ в точке a и нулевое значение во всех остальных точках. Интеграл от такой функции равен нулю.

Превратим точку c в переменную величину $c = x \in [a, b]$ и будем рассматривать

(1)
$$\int_{\mathbb{R}} f\chi_{[a,x]}(t)dt = \int_a^x f(t)dt = F(x)$$

как функцию переменного $x \in [a, b]$. Эта функция определена на отрезке $[a, b]$ и называется *интегралом с переменным верхним пределом интегрирования* от функции f. Чтобы избежать путаницы в обозначениях, мы намеренно применили разные буквы: t как переменную интегрирования и x как верхний предел. Зачастую в литературе используют один и тот же символ в обозначениях переменной интегрирования и переменного предела интегрирования, рассчитывая, что читатель по смыслу различает роль каждого знака в формуле.

Отметим два крайних значения функции F

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt, \qquad F(a)=\int_a^a f(t)dt=0\,.$$

Разумеется, сходным образом можно определить интеграл с переменным нижним пределом интегрирования, но свойство аддитивности интеграла Римана

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^b f(t)dt$$

элементарно сводит его к интегралу с переменным верхним пределом.

Формулу (1) можно интерпретировать как некий оператор, сопоставляющий данной функции f, определенной на отрезке $[a, b]$, функцию F, определенную на том же отрезке. При таком взгляде разумно поставить задачу исследования свойств функции F в зависимости от известных свойств функции f.

2. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом

Покажем, что интеграл F с переменным пределом интегрирования обладает свойствами, лучшими по сравнению с функцией f. Начнем демонстрацию этого тезиса с доказательства того, что интегрируемая функция f порождает непрерывную функцию F.

Теорема 1 *Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$. *Тогда функция F,*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Непрерывность функции F в крайних точках отрезка $[a, b]$ понимается как односторонняя: непрерывность справа в точке a и непрерывность слева в точке b.

Интегрируемая функция f ограничена. Значит, для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$ с некоторым заданным числом M.

Выберем произвольно точку $x_0 \in [a, b]$. Пусть $x > x_0$, $x \in [a, b]$.

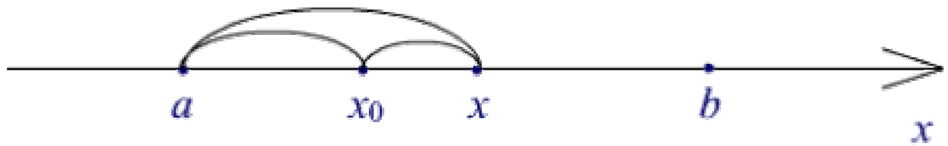


Рис. 1. Иллюстрация к доказательству непрерывности интеграла с переменным верхним пределом.

Тогда по свойству аддитивности интеграла Римана

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

откуда получаем оценку

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right| \le \int_{x_0}^x |f(t)|dt \le \int_{x_0}^x M dt = M(x - x_0).$$

Устремляя x к x_0, видим, что правая часть неравенства стремится к нулю, следовательно,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = F(x_0),$$

что означает непрерывность справа функции F в точке x_0.

Симметричными рассуждениями устанавливаем, что функция F непрерывна слева в точке x_0. Одновременная непрерывность слева и справа равносильна непрерывности функции F в точке x_0. Если точка x_0 совпала с одной из крайних точек a или b отрезка $[a, b]$, то рассуждения относятся только к односторонней непрерывности в этой точке. Поскольку x_0 - произвольная точка отрезка, то функция F непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, что заканчивает доказательство теоремы 1.

3. Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом

Значительно более важным оказывается вывод о том, что непрерывная функция f порождает дифференцируемую функцию F.

Теорема 2 *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция F,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$ справедлива формула

$$F'(x) = f(x).$$

Доказательство. Выберем произвольно точку $x_0 \in [a, b]$ и докажем, что функция F дифференцируема в точке x_0. Непрерывность функции f и предел в определении производной

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

в крайних точках a и b отрезка $[a, b]$ понимаются односторонне: справа в точке a и слева в точке b.

Пусть $x > x_0$, $x \in [a, b]$. Тогда по свойству аддитивности интеграла Римана и первой теореме о среднем

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0} = \frac{f(c)(x - x_0)}{x - x_0} = f(c),$$

где $c \in [x_0, x]$. Если x стремится к x_0, то и c стремится к x_0. Переходя в последнем равенстве к пределу при $x \to x_0$ и пользуясь непрерывностью функции f в точке x_0, получим

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{c\to x_0+0}f(c)=f(x_0)$$

Симметричными рассуждениями устанавливаем, что

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{c\to x_0-0}f(c)=f(x_0)$$

что доказывает дифференцируемость функции F в точке x_0 и формулу

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Если точка x_0 совпала с одной из крайних точек a или b отрезка $[a, b]$, то рассуждения относятся только к одностороннему пределу в этой точке. Поскольку x_0 - произвольная точка отрезка, то функция F дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$ и всюду справедлива найденная формула для производной, что заканчивает доказательство теоремы 2.

Благодаря связи между интегралами с переменным верхним и переменным нижним пределами интегрирования

$$G(x)=\int_x^b f(t)dt=\int_a^b f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^b f(t)dt-F(x),$$

видим, что функция G также дифференцируема на отрезке $[a, b]$, во всех точках которого справедлива формула

$$G'(x)=-F'(x)=-f(x).$$

4. Формула Ньютона-Лейбница

Помимо непосредственного вывода, теорема 2 влечет глубокие следствия. Так, формула для производной F' означает, что функция F является первообразной функции f. Выразим этот факт как следствие теоремы 2.

Следствие Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f имеет первообразную на этом отрезке. *Одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\,.$$

Еще более важное заключение следует из теоремы 2, если положить в ней x=b и, принимая во внимание, что $F(a)$ =0, переписать формулу в виде

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a)$$

Функция F здесь является интегралом с переменным верхним пределом интегрирования и в то же время первообразной для функции f. Как было показано, приращение первообразной $F(b)–F(a)$ не зависит от выбора первообразной. Сформулируем окончательный результат как отдельную теорему.

Теорема 3 *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$*, то она имеет первообразную F на этом отрезке и справедлива формула*

(2) $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула (2) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Без большого преувеличения формулу Ньютона-Лейбница можно отнести к главной формуле математического анализа. Она связывает воедино две ветви математического анализа - дифференциальное и интегральное исчисление, которые и до той поры решали свои задачи с разной степенью эффективности, но действовали поврозь. С появлением формулы Ньютона-Лейбница математический анализ становится единой наукой.

В левой части формулы Ньютона-Лейбница находится интеграл Римана от функции f на отрезке $[a, b]$, непосредственный продукт интегрального исчисления. В правой части формулы находится приращение первообразной функции f на отрезке $[a, b]$. Понятие первообразной, как результата операции, обратной по отношению к дифференцируемости, - это продукт дифференциального исчисления.

Формула Ньютона-Лейбница делает осмысленным поначалу казавшееся странным название и обозначение определенного интеграла от функции f, понимаемого как приращение $F(b)–F(a)$ любой из первообразных функции f. Когда стало ясно, что он равен интегралу Римана, естественным для него выглядит обозначение

$$\int_a^b f(x)dx,$$

такое же, как и для интеграла Римана.

Лекция 26

1. Интегрирование по частям в интеграле Римана

В теории определенного интеграла мы вывели два метода интегрирования, основанные на обратном прочтении формул дифференцирования произведения и композиции двух функций. Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, переведем эти правила в теорию интеграла Римана.

Теорема 1 *Пусть функции f и g дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и произведения $f'g$ и fg' непрерывны на $[a, b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям интеграла Римана*

$$\int_a^b (f'g)(x)dx = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b (fg')(x)dx.$$

Доказательство. Так как функции $f'g$ и fg' непрерывны на отрезке $[a, b]$, то согласно формуле Ньютона-Лейбница интегралы Римана от этих функций совпадают с их определенными интегралами. В лекции 19 формула интегрирования по частям была доказана для определенных интегралов. Следовательно, при высказанных условиях на функции f и g она справедлива и для интегралов Римана, что заканчивает доказательство теоремы 1.

2. Замена переменной в интеграле Римана

Таким же образом переведем в теорию интеграла Римана формулу замены переменной, доказанную ранее для определенного интеграла.

Теорема 2 *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную φ' на отрезке $[\alpha, \beta]$ и отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$ так, что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива формула замены переменной в интеграле Римана*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Дифференцируемая функция $x = \varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, поэтому композиция $f \circ \varphi$ непрерывных функций f и φ и произведение $(f \circ \varphi)\varphi'$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Таким образом, оба интеграла в формулировке теоремы 2 существуют и в смысле Римана, и в смысле определенного интеграла. Согласно формуле Ньютона-Лейбница интегралы Римана от этих функций совпадают с их определенными интегралами. В лекции 19 формула замены переменной была доказана для определенных интегралов. Следовательно, при высказанных условиях на функции f и φ она справедлива и для интегралов Римана, что заканчивает доказательство теоремы 2.

3. Вторая теорема о среднем значении

Среди элементарных свойств интеграла Римана доказанная в лекции 24 первая теорема о среднем занимает свое место. Более тонкие свойства интеграла Римана выражены в следующей теореме, известной под названием второй теоремы о среднем значении.

Теорема 3 *Пусть функция f монотонна на отрезке $[a, b]$, а функция g интегрируема по Риману на этом отрезке. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что справедлива формула*

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

Доказательство. Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема, а потому и произведение fg интегрируемо на этом отрезке.

Интегрируемая функция g ограничена, то есть для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|g(x)| \le C$ с некоторым $C \ge 0$.

Докажем теорему 3 для невозрастающей функции f. В случае неубывающей функции заменим f на невозрастающую функцию $-f$ с сохранением всех утверждений.

На первом этапе доказательства предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$ и покажем, что существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что справедлива формула

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx.$$

Создадим разбиение $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ отрезка $[a, b]$ с отрезками $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, одинаковой длины, равной $(b - a)/n$. Благодаря свойствам аддитивности и линейности интеграла Римана

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (fg)(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}) + f(x_{k-1}))g(x)dx =$$

(1) $$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))g(x)dx + \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx.$$

Обозначим

$$S_{n_1} = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))g(x)dx, S_{n_2} = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx.$$

Оценим S_{n1}

$$\left|S_{n_1}\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))g(x)dx\right| \leq \sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))g(x)dx\right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})||g(x)|dx \leq C\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})|dx =$$

$$\boxed{C\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_{k-1}))dx \le C\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x_k)-f(x_{k-1}))dx =}$$

$$C\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx = C\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))|\Delta_k| =$$

$$C\frac{b-a}{n}(f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})) =$$

$$\frac{C(b-a)(f(x_n)-f(x_0))}{n} = \frac{C(b-a)(f(b)-f(a))}{n}.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и увидим, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{n_1} = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Функция G непрерывна на отрезке $[a, b]$, $G(a) = G(x_0) = 0$, и по второй теореме Вейерштрасса достигает на $[a, b]$ своего минимума и максимума. Обозначим

$$m = \min_{x\in[a,b]} G(x) \text{ и } M = \max_{x\in[a,b]} G(x).$$

Представим сумму S_{n2} в виде

$$S_{n_2} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)dt = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \left(\int_{a}^{x_k} g(t)dt - \int_{a}^{x_{k-1}} g(t)dt \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(G(x_k) - G(x_{k-1})) =$$

$$f(x_0)G(x_1) + f(x_1)(G(x_2) - G(x_1)) + \ldots + f(x_{n-1})(G(x_n) - G(x_{n-1})) =$$

$$G(x_1)(f(x_0) - f(x_1)) - G(x_2)(f(x_1) - f(x_2)) + \ldots + G(x_{n-1})(f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})) + G(x_n) f(x_{n-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} G(x_k)(f(x_{k-1}) - f(x_k)) + G(x_n) f(x_{n-1}).$$

Пользуясь тем, что $f(x_{k-1}) - f(x_k) \geq 0$ и $f(x_{n-1}) \geq 0$ и что $m \leq G(x) \leq M$, отсюда получим оценки для S_{n2}

$$\sum_{k=1}^{n-1} m(f(x_{k-1}) - f(x_k)) + mf(x_{k-1}) \leq S_{n_2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} M(f(x_{k-1}) - f(x_k)) + Mf(x_{k-1})$$

или

$$m(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2}) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})) \leq S_{n2} \leq$$

$$M(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2}) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})),$$

что равносильно неравенствам

$$mf(a) \le S_{n2} \le Mf(a).$$

Если $f(a) = 0$, то $f = 0$ тождественно на $[a, b]$ и сформулированное утверждение становится очевидным. Теперь предположим, что $f(a) > 0$. Тогда поделим последние неравенства на $f(a)$ и получим

$$m \le \frac{S_{n_2}}{f(a)} \le M.$$

Возвращаясь к формуле (1), находим, что

$$m \le \frac{\int_a^b (fg)(x)dx - S_{n_1}}{f(a)} \le M.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получим

$$m \le \frac{\int_a^b (fg)(x)dx}{f(a)} \le M.$$

Обозначим

$$\frac{\int_a^b (fg)(x)dx}{f(a)} = \mu.$$

По теореме Коши о промежуточном значении непрерывная функция G принимает на отрезке $[a, b]$ все промежуточные значения между минимальным m и максимальным M. В частности, найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$G(\xi) = \mu,$$

или иначе

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(a)G(\xi) = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx,$$

что доказывает утверждение первого этапа теоремы 3.

На втором этапе рассмотрим общий случай произвольных значений $f(x)$. Пользуясь тем, что $f(x) - f(b) \geq 0$, применим результат первого этапа к произведению $(f(x) - f(b))g(x)$ монотонной функции $y = f(x) - f(b)$ и интегрируемой функции $y = g(x)$ и получим

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \int_a^b (f(x) - f(b) + f(b))g(x)dx =$$

$$\int_a^b (f(x) - f(b))g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx =$$

$$(f(a) - f(b))\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx =$$

$$f(a)\int_a^{\xi} g(x) + f(b)\left(\int_a^b g(x)dx - \int_a^{\xi} g(x)dx\right) =$$

$$f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)dx,$$

что заканчивает доказательство теоремы 3.

Лекция 27

1. Несобственные интегралы Римана от нефинитных функций

Конструкция интеграла Римана с первых шагов предполагала, что рассматриваются лишь финитные ограниченные функции f, иначе не найдется ступенчатых функций f_{cm} таких, что $f_{cm} \le f$ или $f_{cm} \ge f$, с помощью которых строятся нижний или верхний интегралы.

Финитность функции f предполагает, что $f=0$ вне некоторого отрезка $[a, b]$. Ограниченность функции f означает выполнение на отрезке $[a, b]$ неравенства $|f(x)| \le M$ с некоторым $M \ge 0$.

Оба ограничения могут быть преодолены операцией предельного перехода. Получающиеся в результате интегралы называются несобственными. Начнем с распространения понятия интеграла на случай функций, принимающих ненулевые значения на полуоси или оси.

Определение 1. *Пусть при фиксированном a и любом $b > a$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и существует предел*

$$\lim_{b\to 0}\int_a^b f(x)dx.$$

Тогда этот предел называется несобственным интегралом Римана от функции f на полуоси $[a, \infty)$ и обозначается

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится. В случае отсутствия предела несобственный интеграл Римана расходится.

Таким образом, по определению 1

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to 0}\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 1. Пусть $a = 1$ и $f(x) = 1/x^2$. Одной из первообразных функции f является $F(x) = -1/x$. Вычислим

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Таким образом, несобственный интеграл Римана

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

сходится и равен 1.

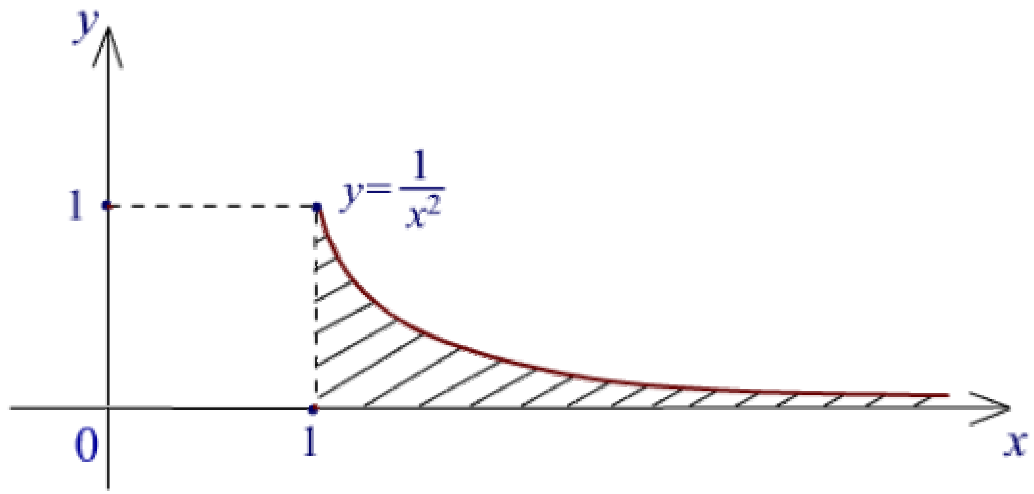


Рис. 1. Иллюстрация к Примеру 1

Аналогично определим интеграл на полуоси $(-\infty, b]$.

<u>Определение 2.</u> *Пусть при фиксированном* b *и любом* $a < b$ *функция* f *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$ *и существует предел*

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Тогда этот предел называется несобственным интегралом Римана от функции f *на полуоси* $(-\infty, b]$ *и обозначается*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится. В случае отсутствия предела несобственный интеграл Римана расходится.

Таким образом, по определению 2

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Соединим определения 1 и 2 для рассмотрения несобственного интеграла на оси.

<u>Определение 3.</u> *Пусть для любых* a *и* b, $a < b$, *функция* f *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$ *и существует предел*

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx.$$

Тогда этот предел называется несобственным интегралом Римана от функции f *на оси* $(-\infty, \infty)$ *и обозначается*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится. В случае отсутствия предела несобственный интеграл Римана расходится.

Таким образом, по определению 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Остановимся на смысле двойного предела при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$, который эквивалентно запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left[\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx \right] = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx.$$

Первый интеграл в правой части равенства зависит только от a, а второй интеграл - только от b. Значит, двойной предел распадается на сумму двух независимых друг от друга предельных переходов отдельно по a и по b.

Однако может случиться, что несобственный интеграл Римана на оси расходится, но двойной предел существует, если положить $a = -b$. Дадим этому феномену свое название.

<u>Определение 4.</u> *Пусть несобственный интеграл Римана*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

расходится, но существует предел

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx.$$

Тогда этот предел называется главным значением несобственного интеграла Римана от функции f на оси $(-\infty, \infty)$ *и обозначается*

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \text{ или p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится в смысле главного значения.

Пример 2. Пусть $f(x) = 1/(1+x^2)$. Одной из первообразных функции f является $F(x) = \operatorname{arctg} x$. Вычислим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}(-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Таким образом, несобственный интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

сходится и равен π.

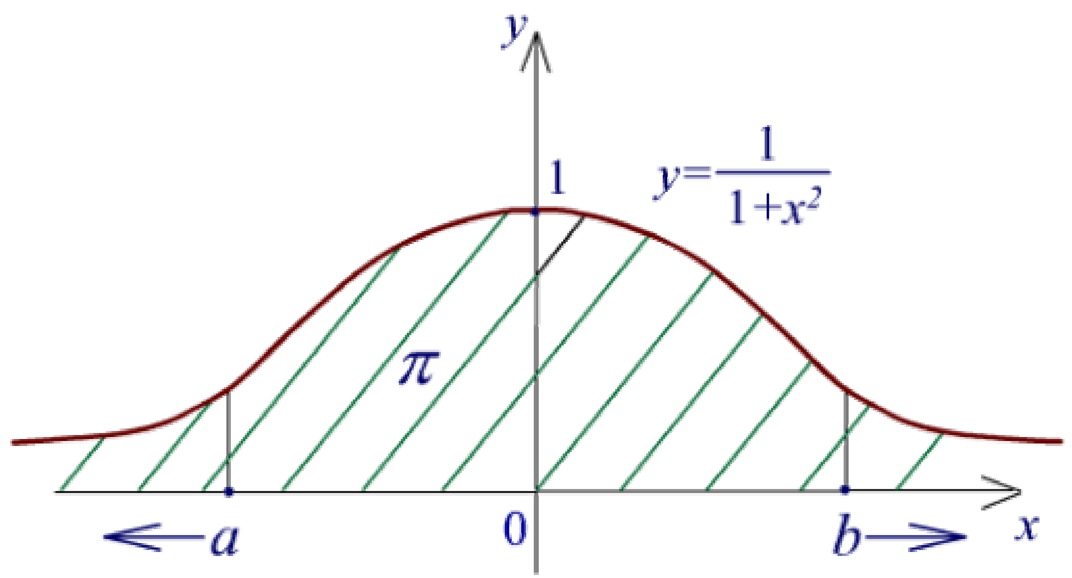


Рис. 2. Иллюстрация к Примеру 2

2. Несобственные интегралы Римана от неограниченных функций

Сходным образом научимся интегрировать неограниченные функции.

Определение 5. *Пусть при фиксированных a и b и любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ и существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Тогда этот предел называется несобственным интегралом Римана от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится. В случае отсутствия предела несобственный интеграл Римана расходится.

Малость $\varepsilon > 0$ нужна лишь для того, чтобы выполнялось условие $a < b - \varepsilon$.

В определении 5 не говорится прямо, что функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$, но именно в этом состоит основная мотивация перехода к рассмотрению несобственного интеграла. Определение 5 не противоречит пониманию интеграла Римана на отрезке в случае интегрируемости по Риману функции f на $[a, b]$. Действительно, как было доказано в лекции 25, в этом случае интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

с переменным верхним пределом интегрирования непрерывен на $[a, b]$, поэтому значение интеграла Римана

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} F(b - \varepsilon).$$

равно значению несобственного интеграла Римана в смысле определения 5.

Аналогично определим интеграл для функции f, неограниченной в окрестности точки a.

<u>Определение 6.</u> *Пусть при фиксированных* a *и* b *и любом достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *функция* f *интегрируема по Риману на отрезке* $[a + \varepsilon, b]$ *и существует предел*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Тогда этот предел называется несобственным интегралом Римана от функции f *на отрезке* $[a, b]$ *и обозначается*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится. В случае отсутствия предела несобственный интеграл Римана расходится.

Пример 3. Пусть $a = 0$, $b = 1$ и $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Одной из первообразных функции f является $F(x) = 2\sqrt{x}$. Вычислим

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Таким образом, несобственный интеграл Римана

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

сходится и равен 2.

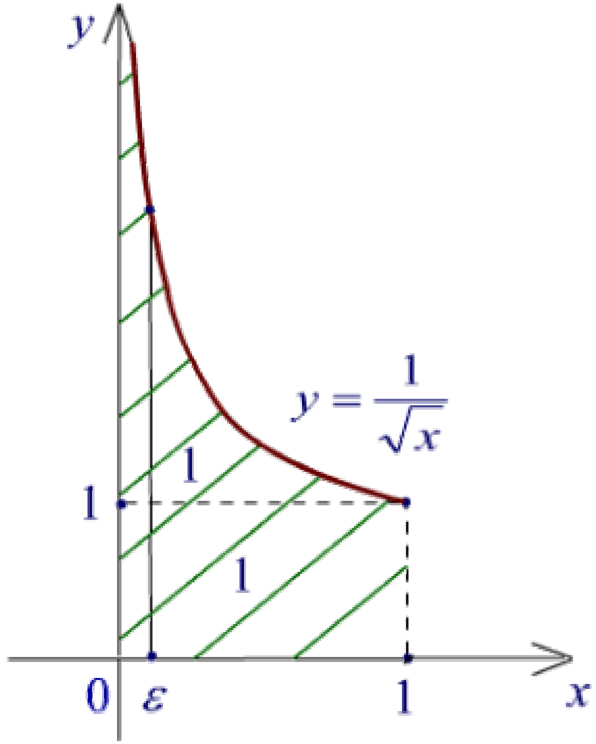


Рис. 3. Иллюстрация к Примеру 3

Соединим определения 5 и 6 для рассмотрения несобственного интеграла от функции, неограниченной в окрестности внутренней точки отрезка $[a, b]$.

<u>Определение 7.</u> *Пусть при фиксированных* a, b *и* $c \in (a, b)$ *и любых достаточно малых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *функция* f *интегрируема по Риману на отрезках* $[a, c - \varepsilon_1]$ *и* $[c + \varepsilon_2, b]$ *и существует предел*

$$\lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Тогда этот предел называется несобственным интегралом Римана от функции f *на отрезке* $[a, b]$ *и обозначается*

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится. В случае отсутствия предела несобственный интеграл Римана расходится.

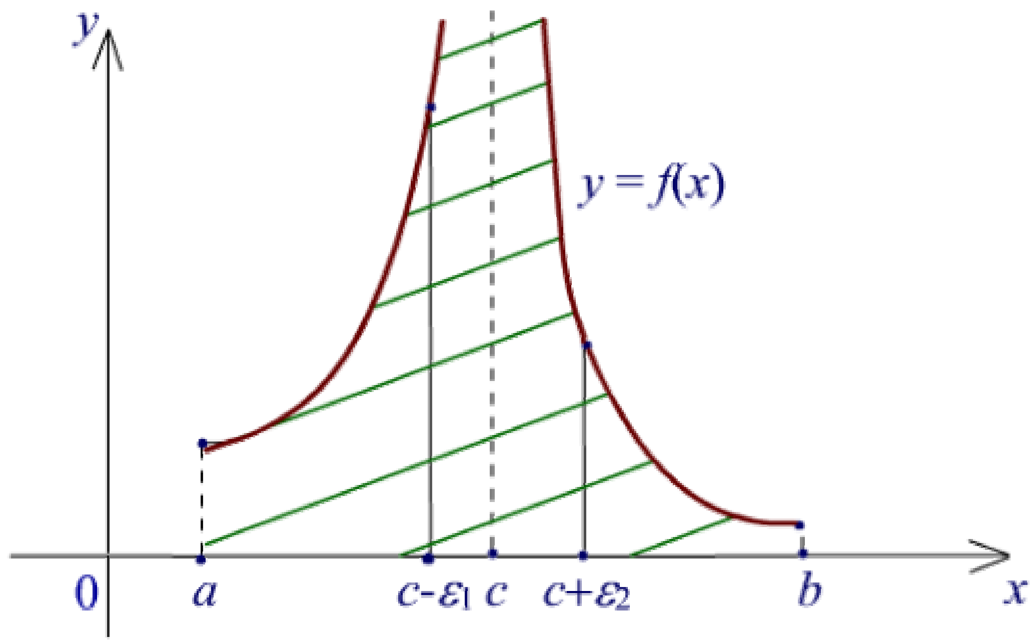


Рис. 4. Иллюстрация к Определению 7

Однако может случиться, что двойной предел определения 7 не существует, но дело изменится, если положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Как и в случае нефинитных функций, дадим такому пределу название главного значения несобственного интеграла.

<u>Определение 8.</u> *Пусть несобственный интеграл Римана*

$$\int_a^b f(x)dx$$

расходится, но существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Тогда этот предел называется главным значением несобственного интеграла Римана от функции f на отрезке $[a, b]$ *и обозначается*

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx \text{ или } \text{p.v.}\int_a^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл Римана сходится в смысле главного значения.

Исследование всех несобственных интегралов определений 1-8 проводится похожими методами. В дальнейшем мы остановимся на несобственном интеграле определения 1, имея в виду, что все сказанное относится и к остальным типам несобственных интегралов.

3. Линейные операции над несобственными интегралами Римана

Определение 1 сходимости несобственного интеграла Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

равносильно существованию предела $\lim_{b\to\infty}F(b)$ интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt.$$

Поскольку интеграл Римана и операция предельного перехода в теории функций инвариантны относительно линейных операций над функциями, то та же инвариантность проявляется в теории несобственных интегралов Римана. Выразим эту мысль в следующей теореме.

Теорема 1 *Пусть несобственные интегралы Римана*

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ и } \int_a^\infty g(x)dx$$

сходятся и $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда несобственные интегралы Римана*

$$\int_a^\infty \alpha f(x)dx \text{ и } \int_a^\infty (f+g)(x)dx$$

сходятся и справедливы формулы

$$\int_a^\infty \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^\infty f(x)dx,$$

$$\int_a^\infty (f+g)(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx.$$

Доказательство. Утверждения теоремы 1 о сходимости несобственных интегралов Римана и формулы для интегралов следуют из преобразований

$$\int_a^\infty \alpha f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \alpha f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \alpha \int_a^b f(x)dx = \alpha \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \alpha \int_a^\infty f(x)dx$$

и

$$\int_a^\infty (f+g)(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b (f+g)(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx.$$

которые заканчивают доказательство теоремы 1.

Лекция 28

1. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов Римана

Определение сходимости несобственного интеграла Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

равносильно существованию предела $\lim_{b\to\infty}F(b)$ интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

(1) $$(1) F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

В лекции 12 был доказан критерий Коши существования предела функции в конечной точке x_0. Поскольку понятие предела функции было перенесено на случай $x_0=\infty$, то равным образом можно переформулировать критерий Коши существования предела $\lim_{b\to\infty}F(b)$ в виде

$$\forall\varepsilon>0\ \exists b>a\ \forall b',b''\ \ b'>b \text{ и } b''>b \Rightarrow |F(b'')-F(b')|<\varepsilon.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $b''>b'$. Пользуясь аддитивностью интеграла Римана, преобразуем разность $F(b'')-F(b')$

(2) $$(2) F(b'')-F(b')=\int_a^{b''} f(x)dx-\int_a^{b'} f(x)dx=\int_{b'}^{b''} f(x)dx$$

и переформулируем критерий Коши существования предела $\lim_{b\to\infty}F(b)$ как критерий Коши сходимости несобственных интегралов Римана.

Теорема 1 *Пусть при фиксированном a и любом b > a функция f интегрируема по Риману на отрезке* [a, b]. *Несобственный интеграл Римана*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\forall\varepsilon>0\exists b>a\forall b',b''b'>b \text{ и } b''>b'\Rightarrow\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

Разумеется, теорема 1 не требует нового доказательства

2. Критерий сходимости несобственных интегралов Римана от неотрицательных функций

Рассмотрим несобственный интеграл Римана от неотрицательной функции $f \geq 0$. По-прежнему пусть функция F задается формулой (1). Воспользовавшись равенством (2) для $a < b' < b''$, получим неравенство

$$F(b'')-F(b')=\int_{b'}^{b''} f(x)dx\geq 0,$$

которое означает, что функция F не убывает на [a, ∞). Таким образом, условие $f \geq 0$ влечет монотонность функции F. В лекции 12 было доказано, что всякая монотонная ограниченная функция имеет односторонние пределы в точке x_0. С другой стороны, неограниченная функция не может иметь предела в точке. Те же утверждения переносятся на случай бесконечно удаленной точки $x_0 = \infty$. Таким образом, мы пришли к формулировке следующей теоремы, которая является критерием сходимости несобственных интегралов Римана от неотрицательных функций.

Теорема 2 *Пусть при фиксированном a и любом b > a неотрицательная функция* $f \geq 0$ *интегрируема по Риману на отрезке* [a, b]. *Несобственный интеграл Римана*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

сходится тогда и только тогда, когда интеграл F с переменным верхним пределом интегрирования, задаваемый формулой (1), *является ограниченной функцией на полуоси* $[a, \infty)$.

3. Абсолютная сходимость несобственного интеграла Римана

По аналогии с теорией числовых рядов дадим определение абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана.

Определение 1 *Несобственный интеграл Римана от функции f на полуоси* $[a, \infty)$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл Римана от функции* $|f|$ *на полуоси* $[a, \infty)$.

В соответствии с аналогичной теоремой для числовых рядов покажем, что абсолютная сходимость влечет сходимость несобственного интеграла.

Теорема 3 *Если несобственный интеграл Римана*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Абсолютная сходимость несобственного интеграла Римана в теореме 3 означает сходимость несобственного интеграла Римана

$$\int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Согласно критерию Коши выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b > a \forall b', b'' b' > b \text{ и } b'' > b' \Rightarrow \int_{b'}^{b''} |f(x)| dx < \varepsilon .$$

Знак модуля интеграла опущен, потому что $|f| \geq 0$. Из этого условия выводим условие для исследуемого несобственного интеграла Римана

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b > a \forall b', b'' b' > b \text{ и } b'' > b' \Rightarrow \left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| \leq \int_{b'}^{b''} |f(x) dx| < \varepsilon ,$$

которое является условием критерия Коши сходимости несобственного интеграла Римана. Следовательно, несобственный интеграл Римана от функции f на полуоси $[a, \infty)$ сходится, что заканчивает доказательство теоремы 3.

4. Признак мажорации сходимости несобственных интегралов Римана

Связь между несобственными интегралами и числовыми рядами не только внешняя, но и весьма глубокая по содержанию, проблематике, средствам исследования и идейному наполнению.

Как и в теории числовых рядов, одна из основных задач теории несобственных интегралов состоит в выяснении сходимости или расходимости интегралов и в меньшей степени в их вычислении. Поэтому важную роль приобретают признаки сходимости - достаточные условия, допускающие относительно простую проверку. По аналогии с числовыми рядами начнем с признака мажорации.

Теорема 4 *Пусть при фиксированном a и любом $b > a$ функции f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \geq a$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq Cg(x)$ с некоторым $C \geq 0$. Тогда сходимость несобственного интеграла Римана*

$$\int_a^\infty g(x) dx$$

влечет абсолютную сходимость несобственного интеграла Римана

$$\int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для функции g, несобственный интеграл Римана которой сходится, согласно критерию Коши выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b > a \forall b', b'' b' > b \text{ и } b'' > b' \Rightarrow \left| \int_{b'}^{b''} g(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Знак модуля интеграла здесь излишен, так как $g \geq 0$ на полуоси $[a, \infty)$. Пользуясь неравенством условия теоремы 4, получаем условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b > a \forall b', b'' b' > b \text{ и } b'' > b' \Rightarrow \int_{b'}^{b''} |f(x)| dx \leq \int_{b'}^{b''} Cg(x)dx < C\varepsilon ,$$

что равносильно критерию Коши сходимости несобственного интеграла Римана

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx .$$

Следовательно, несобственный интеграл Римана от функции f абсолютно сходится на полуоси $[a, \infty)$, что заканчивает доказательство теоремы 4.

Заметим, что неравенство $| f(x) | \leq Cg(x)$ использовалось в условии критерия Коши не на всей полуоси $[a, \infty)$, а только для $x > b$. Таким образом, условие теоремы 4 можно ослабить, потребовав, чтобы нашлось $b > a$ такое, что неравенство $| f(x) | \leq Cg(x)$ выполняется для всех $x > b$.

5. Признак сравнения сходимости несобственных интегралов Римана

Другое достаточное условие сходимости несобственного интеграла Римана называется признаком сравнения и дается в следующей теореме.

Теорема 5 *Пусть при фиксированном a и любом $b > a$ функции f и g интегрируемы по Риману на отрезке* $[a, b]$ *и существует предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=l\,.$$

Если $l > 0$, *то несобственные интегралы Римана*

$$\int_a^\infty f(x)dx \ \text{и} \ \int_a^\infty g(x)dx$$

одновременно абсолютно сходятся или не сходятся абсолютно. Если $l = 0$, *то абсолютная сходимость второго из перечисленных интегралов влечет абсолютную сходимость первого интеграла.*

Доказательство. По определению предела функции в точке $x_0 = \infty$

$$\forall\varepsilon>0\exists b\forall x\ \ x>b\Rightarrow\left|\frac{|f(x)|}{|g(x)|}-l\right|<\varepsilon\,.$$

Это влечет неравенства

(3) $$-\varepsilon<\frac{|f(x)|}{|g(x)|}-l<\varepsilon\,,$$

из которых заключаем, что для всех $x > b$ выполняется неравенство

$$|f(x)|<(l+\varepsilon)|g(x)|\,.$$

Согласно признаку мажорации абсолютная сходимость несобственного интеграла Римана

(4) $$\int_a^\infty g(x)dx$$

влечет абсолютную сходимость несобственного интеграла Римана

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \tag{5}$$

что, в частности при $l = 0$, доказывает второе утверждение теоремы 5.

Если $l = 0$, то положив $\varepsilon = l$, из левого неравенства в формуле (3) выводим, что $|f(x)| > 0$ для $x > b$. Для таких x дробь $|g(x)| / |f(x)|$ определена и существует предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \frac{1}{l}.$$

Применяя к паре функций f и g рассуждения первой части доказательства с заменой числа l на $1/l$, заключаем, что абсолютная сходимость несобственного интеграла Римана (5) влечет абсолютную сходимость несобственного интеграла Римана (4), что заканчивает доказательство теоремы 5.

Если принять, что предел в теореме 5 бесконечен,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty, \tag{6}$$

то меняя ролями функции f и g, сводим исследование к случаю $l = 0$. Таким образом, добавим к теореме 5 утверждение: если при условиях теоремы 5 выполняется условие (6), то абсолютная сходимость несобственного интеграла Римана (5) влечет абсолютную сходимость несобственного интеграла Римана (4).

Признаки мажорации и сравнения рассчитаны на то, что исследуемая функция f сравнивается с некоторой тестовой функцией g, о которой известно поведение ее несобственного интеграла Римана. Естественно, что набор тестовых функций должен, в первую очередь, состоять из простейших, например, степенных функций.

Пример 1. Пусть $a = 1$ и $g(x) = 1/x^p$. Если $p = 1$, то одной из первообразных функции g является $G(x) = \log x$. Если $p \neq 1$, то одной из первообразных функции g является $G(x) = -1/(p-1)x^{p-1}$. Вычислим

$$\int_1^b g(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \frac{-1}{(p-1)b^{p-1}} + \frac{1}{p-1}, p \neq 1 \\ \log b, p \neq 1. \end{cases}$$

Если $p > 1$, то

$$\lim_{b\to\infty}\left|\frac{1}{b^{p-1}}\right| = 0 .$$

Если же $p < 1$, то $\lim_{b\to\infty} b^{p-1} = 0$, а

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}}$$

не существует. Наконец, если $p = 1$, то $\lim_{b\to\infty} \log b$ также не существует.

Подводя итог, заключаем, что

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}dx$$

существует и равен $1/(p-1)$, если $p > 1$, и не существует, если $p \le 1$. Следовательно, несобственный интеграл Римана

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$$

сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \le 1$.

Следствие Пусть при фиксированном a и любом $b > a$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и существует предел

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)|x^p = l .$$

Тогда несобственный интеграл Римана

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

абсолютно сходится, если $p > 1$, и не сходится абсолютно, если $l > 0$ и $p \leq 1$.

Доказательство следствия основано на применении признака сравнения, в котором $g(x) = 1/x^p$.

Лекция 29

1. Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

Развивая аналогии между теорией числовых рядов и несобственных интегралов, докажем интегральный признак Коши, устанавливающий одновременную сходимость несобственного интеграла и соответствующего числового ряда.

Теорема 1 *Пусть функция f монотонна на полуоси* $[1, \infty)$. *Числовой ряд*

$$\sum f(n) \qquad (1)$$

сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом Римана

$$\int_1^\infty f(x)dx. \qquad (2)$$

Доказательство. Докажем теорему 1 для невозрастающей функции f. Случай неубывающей функции f сводится к рассматриваемому случаю переходом к функции $-f$.

Невозрастающая функция f имеет предел, конечный или бесконечный, при $x\to\infty$. Сначала покажем, что если $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, то числовой ряд (1) и несобственный интеграл Римана (2) расходятся. Действительно, условие $\lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0$ противоречит необходимому условия сходимости ряда (1) и доказывает его расходимость. Обозначим $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Если $l > 0$, то $f(x) \geq l$ для всех $x \geq 1$. Предположение, что несобственный интеграл Римана (2) сходится, по признаку мажорации приводит к утверждению, что несобственный интеграл Римана от функции $y = l$ сходится на полуоси $[1, \infty)$, что противоречит очевидному факту. Если $l < 0$, то по определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b\ \forall x\ \ x > b \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства находим, что $f(x) < l + \varepsilon$. Положив $\varepsilon = -l/2$, получаем, что $f(x) < l/2$ или $|f(x)| > -l/2$ для всех $x > b$. Предположение, что несобственный интеграл Римана (2) сходится, по признаку мажорации приводит к утверждению, что несобственный интеграл Римана от функции $y = -l/2$ сходится на полуоси $[1, \infty)$, что противоречит очевидному факту.

Пусть теперь $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Так как f не возрастает, то $f(x) \geq 0$, $x \geq 1$, и

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1), \qquad n \leq x \leq n+1, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Составим ступенчатые функции

$$f_{1n} = \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\chi_{[n,n+1)} \text{ и } f_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f(k)\chi_{[n,n+1)}.$$

Очевидно, что

$$f_{1n}(x) \leq f(x) \leq f_{2n}(x), \qquad 1 \leq x < n+1.$$

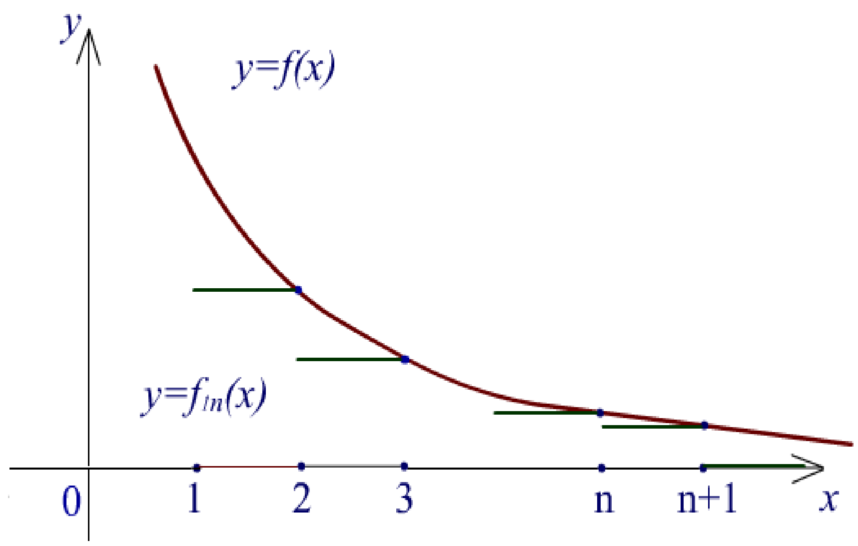


Рис. 1. Иллюстрация к доказательству теоремы об интегральном признаке Коши

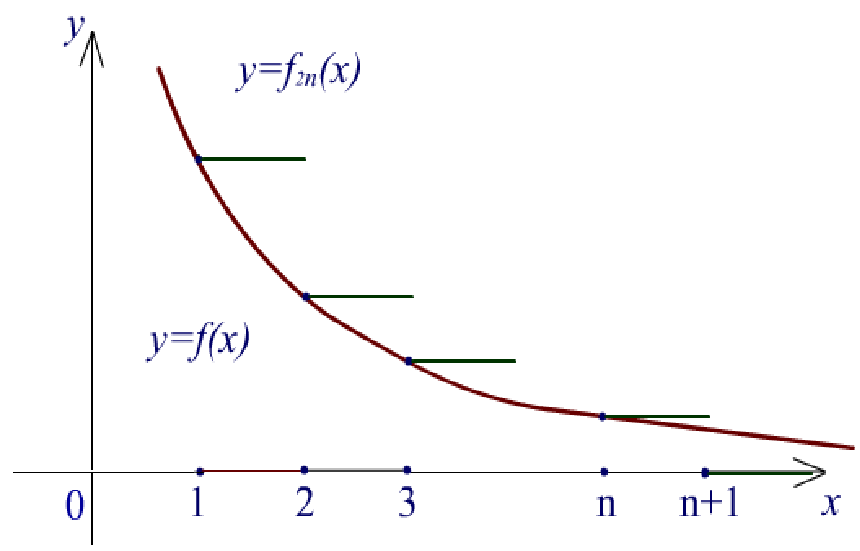


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству теоремы об интегральном признаке Коши

Предположим, что числовой ряд (1) сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = S.$$

Для каждого $b > 1$ найдется натуральное число $n > b$. Оценим

$$F(b) = \int_1^b f(x)dx \le \int_1^n f(x)dx \le \int_a^n f_{2(n-1)}(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = S.$$

что означает ограниченность функции $y = F(b)$. По критерию сходимости несобственных интегралов Римана от неотрицательной функции f несобственный интеграл (2) сходится.

Обратно, пусть несобственный интеграл Римана (2) сходится и

$$\int_1^\infty f(x)dx = I.$$

Оценим частные суммы числового ряда (1)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = f(1) + \int_1^n f_{1n}(x)dx \le$$

$$f(1) + \int_1^n f(x)dx \le f(1) + \int_1^\infty f(x)dx = f(1) + I.$$

что означает ограниченность частных сумм S_n. По критерию сходимости числовых рядов с неотрицательными слагаемыми числовой ряд (1) сходится, что заканчивает доказательство теоремы 1.

Теорема 1 усиливает теорему 5 лекции 8. В лекции 8 было показано, что гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится. Тот же факт мгновенно следует из теоремы 1, потому что несобственный интеграл Римана

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

расходится.

2. Условная сходимость несобственного интеграла Римана

Сходящиеся несобственные интегралы Римана либо абсолютно сходятся, либо не сходятся абсолютно.

Определение 1 *Несобственный интеграл Римана называется условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.*

Иными словами, несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

условно сходится, если он сходится, а несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty |f(x)|dx$$

расходится. В дальнейшем мы приведем пример, показывающий существование условно сходящихся несобственных интегралов Римана.

3. Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов Римана

Признаки мажорации и сравнения могут проверить лишь абсолютную сходимость несобственных интегралов. В настоящей части установим признаки сходимости, способные тестировать и условно сходящиеся несобственные интегралы. Начнем с признака, известного как признак Дирихле.

Теорема 2 *Пусть функции f и g удовлетворяют следующим условиям:*

(*а*) *функция f монотонна на полуоси $[a, \infty)$ и $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$;*

(*б*) *для любого $b > a$ функция g интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и функция G,*

$$G(b)=\int_a^b g(x)dx,$$

ограничена на полуоси (a, ∞).

Тогда несобственный интеграл Римана

$$\int_a^{\infty}(fg)(x)dx$$

сходится.

Доказательство. Монотонная функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и поэтому произведение fg интегрируемых функций также интегрируемо по Риману на этом отрезке.

Ограниченность функции G означает, что для всех $b > a$ выполняется неравенство $|G(b)| \le M$ с некоторым $M \ge 0$.

По определению $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b\ \forall x\ \ x > b \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Пусть $b'' > b'$ и $b'' > b'$. По второй теореме о среднем значении найдется точка $\xi \in [b', b'']$ такая, что

$$\left|\int_{b'}^{b''}(fg)(x)dx\right| = \left|f(b')\int_{b'}^{\xi} g(x)dx + f(b'')\int_{\xi}^{b''} g(x)dx\right| =$$

$$\left|f(b')\left(\int_a^{\xi} g(x)dx - \int_a^{b'} g(x)dx\right) + f(b'')\left(\int_a^{b''} g(x)dx - \int_a^{\xi} g(x)dx\right)\right| =$$

$$\left|f(b')\big(G(\xi)-G(b')\big)+f(b'')\big(G(b'')-G(\xi)\big)\right| \le$$

$$|f(b')|\big(|G(\xi)|+|G(b')|\big)+|f(b'')|\big(|G(b'')|+|G(\xi)|\big) \le$$

$$\varepsilon(M+M)+\varepsilon(M+M)=4M\varepsilon,$$

что выражает критерий Коши сходимости несобственного интеграла Римана от произведения fg на полуоси $[a, \infty)$. Следовательно, этот несобственный интеграл Римана сходится, что заканчивает доказательство теоремы 2.

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл Римана

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

и покажем, что он условно сходится. Его сходимость проверяется признаком Дирихле, потому что функция f, $f(x) = 1/x$, монотонно стремится к нулю при $x\to\infty$, а функция g, $g(x) = \sin x$, обладает тем свойством, что интеграл с переменным верхним пределом

$$G(b)=\int_1^b g(x)dx=\int_1^b \sin x dx=-\cos b+\cos 1$$

ограничен, $|G(b)| \le |\cos b| + |\cos 1| < 2$. Аналогичным образом устанавливается, что несобственный интеграл Римана

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$$

сходится. Следовательно, интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

$$H(b)=\int_1^b \frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

является непрерывной функцией на любом отрезке $[a, b]$ и имеет предел при $b\to\infty$. Поэтому функция H ограничена на полуоси $[1, \infty)$, $|H(b)| \le C$, $b \ge 1$.

Теперь покажем, что наш несобственный интеграл не сходится абсолютно. Действительно,

$$\int_1^b \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \int_1^b \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^b \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \int_1^b \frac{1}{2x}\,dx - \int_1^b \frac{\cos 2x}{2x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}H(b) \ge \frac{1}{2}\log b - \frac{C}{2}.$$

Значит, интеграл

$$\int_1^b \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

является неограниченной функцией переменного b и поэтому несобственный интеграл Римана

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

расходится.

4. Признак Абеля сходимости несобственных интегралов Римана

Следующая теорема известна как признак Абеля сходимости несобственного интеграла Римана.

Теорема 3 *Пусть функции f и g удовлетворяют следующим условиям*:

(а) *функция f монотонна и ограничена на полуоси* $[a, \infty)$;

(б) *для любого* $b > a$ *функция* g *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$ *и несобственный интеграл Римана*

$$\int_a^{\infty} g(x)dx$$

сходится.

Тогда несобственный интеграл Римана

$$\int_a^{\infty} (fg)(x)dx$$

сходится.

Доказательство. Монотонная функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и поэтому произведение fg интегрируемых функций также интегрируемо по Риману на этом отрезке.

Ограниченность функции f означает, что для всех $x \geq a$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$ с некоторым $M \geq 0$.

По критерию Коши несобственного интеграла Римана от функции g на полуоси $[a, \infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b', b'' \; b' > b \text{ и } b'' > b' \Rightarrow \left| \int_{b'}^{b''} g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Пусть $b'' > b'$ и $b'' > b'$. По второй теореме о среднем значении найдется точка $\xi \in [b', b'']$ такая, что

$$\left| \int_{b'}^{b''} (fg)(x)dx \right| = \left| f(b') \int_{b'}^{\xi} g(x)dx + f(b'') \int_{\xi}^{b''} g(x)dx \right| =$$

$$|f(b')|\left|\int_{b'}^{\xi} g(x)dx\right| + |f(b'')|\left|\int_{\xi}^{b''} g(x)dx\right| \le M\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon,$$

что выражает критерий Коши сходимости несобственного интеграла Римана от произведения fg на полуоси $[a, \infty)$. Следовательно, этот несобственный интеграл Римана сходится, что заканчивает доказательство теоремы 3.

Условия признаков Дирихле и Абеля весьма схожи, но первое условие признака Абеля ослабляет требование первого условия признака Дирихле, тогда как второе условие признака Абеля усиливает соответствующее условие признака Дирихле.

Лекция 30

1. Простейшая задача интерполирования

В математическом анализе возникает потребность восстановления функции f по ее значениям в точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Конечно, есть немало способов построения таких функций. Задача имеет много решений, из которых желательно выбрать простейшее, например, отыскать многочлен. Обычно простейшая задача интерполирования понимается так: ищется многочлен

$$L_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_{m-1}x + a_m$$

наименьшей степени m, который в заданных точках $x_0 < x_1 < ... < x_n$ принимает заданные значения $y_0, y_1, ..., y_n$.

Если $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, ..., n$, то найденный интерполяционный многочлен L_m приближает функцию f на заданном отрезке $[a, b]$. Имея интерполяционную формулу

$$f(x) = L_m(x) + R_m(x),$$

следует оценить погрешность приближения $R_m(x)$.

Мы не будем решать простейшую интерполяционную задачу в общем виде, а приведем только интерполяционные многочлены Лагранжа в частных случаях $n = 0, 1, 2$.

Интерполяционный многочлен нулевой степени. Если $n = 0$, то интерполяционный многочлен Лагранжа L_0 нулевой степени,

$$L_0(x) = y_0,$$

решает интерполяционную задачу, так как $L_0(x_0) = y_0$ и степень многочлена минимальна.

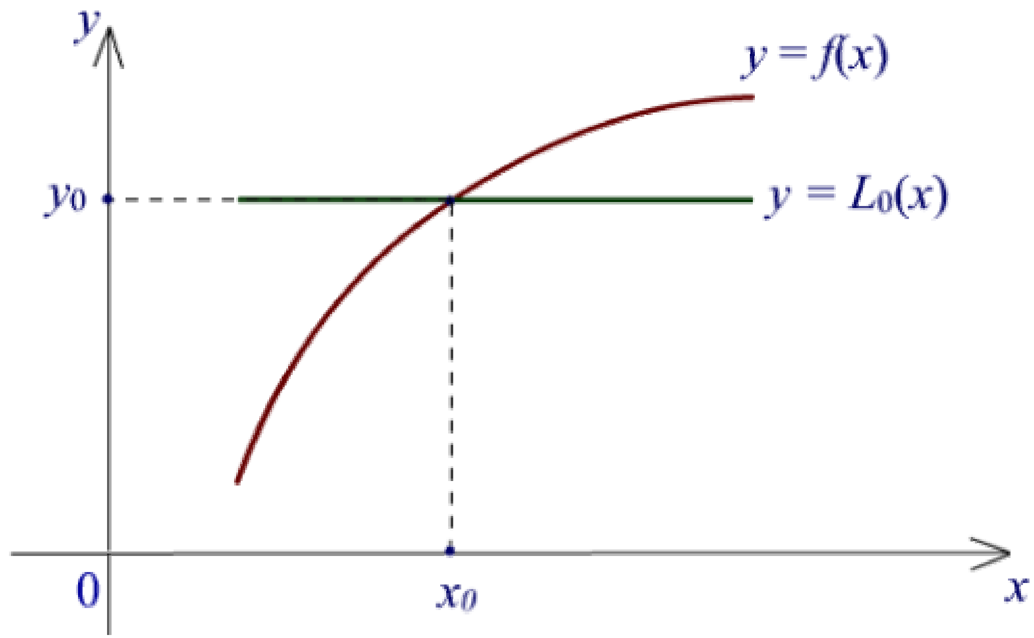


Рис. 1. Иллюстрация приближения функции $f(x)$ многочленом нулевой степени

Интерполяционный многочлен первой степени. Если $n = 1$ то интерполяционный многочлен Лагранжа L_1 степени не выше первой,

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

решает интерполяционную задачу. Действительно, подставляя в формулу для $L_1(x)$ значения x_0 и x_1, непосредственно убеждаемся, что $L_1(x_0) = y_0$ и $L_1(x_1) = y_1$. Если $y_0 \neq y_1$, то есть точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) не лежат на одной горизонтальной прямой, то степень интерполяционного многочлена понизить нельзя.

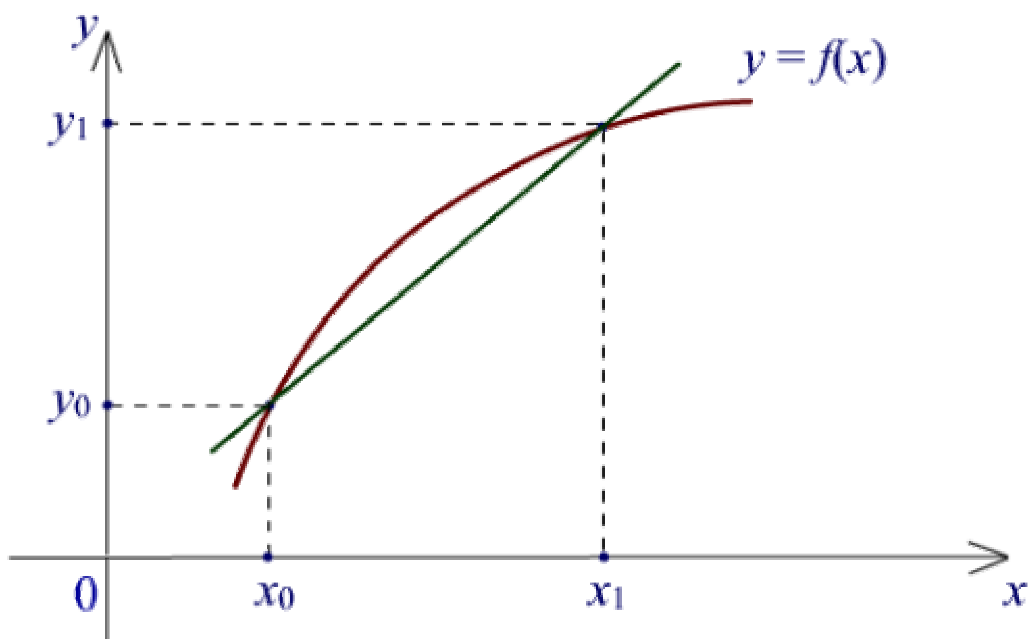


Рис. 2. Иллюстрация приближения функции $f(x)$ многочленом первой степени

Интерполяционный многочлен второй степени. Если $n = 2$, то интерполяционный многочлен Лагранжа L_2 степени не выше второй,

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

решает интерполяционную задачу. Действительно, подставляя в формулу для $L_2(x)$ значения x_0, x_1 и x_2, непосредственно убеждаемся, что $L_2(x_0) = y_0$, $L_2(x_1) = y_1$ и $L_2(x_2) = y_2$. Если точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) не лежат на одной прямой, то степень интерполяционного многочлена понизить нельзя.

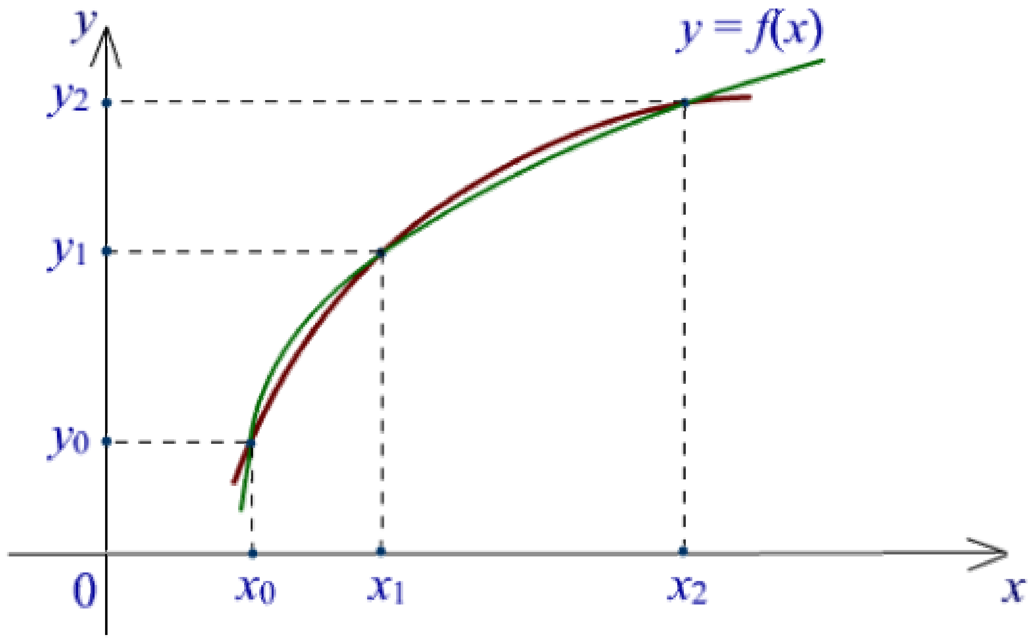


Рис. 3. Иллюстрация приближения функции $f(x)$ многочленом третьей степени

2. Погрешность приближения функции интерполяционным многочленом первой степени

Оценим погрешность $R_1(x) = f(x) - L_1(x)$ приближения функции f ее интерполяционным многочленом Лагранжа L_1.

Теорема 1 *Пусть функция f дважды дифференцируема на отрезке $[x_0, x_1]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $|f''(x)| \le M$. Тогда для погрешности $R_1(x) = f(x) - L_1(x)$ приближения функции f ее интерполяционным многочленом Лагранжа L_1 на отрезке $[x_0, x_1]$ справедлива оценка*

$$|R_1(x)| \le \frac{M}{2}(x - x_0)(x_1 - x), \quad x \in [x_0, x_1].$$

Доказательство. Выберем произвольно число K и обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - L_1(x) - K(x - x_0)(x - x_1), \qquad x \in [x_0, x_1],$$

откуда следует, что $\varphi(x_0) = 0$ и $\varphi(x_1) = 0$ и

$$R_1(x) = \varphi(x) + K(x - x_0)(x - x_1).$$

Функция φ, как и функция f, дважды дифференцируема на отрезке $[x_0, x_1]$. Зафиксируем произвольно $x' \in (x_0, x_1)$ и потребуем, чтобы выполнилось условие $\varphi(x') = 0$, которое равносильно равенству

$$K = \frac{f(x') - L_1(x')}{(x' - x_0)(x' - x_1)}.$$

При таком выборе числа K функция φ обращается в нуль в точках x_0, x' и x_1.

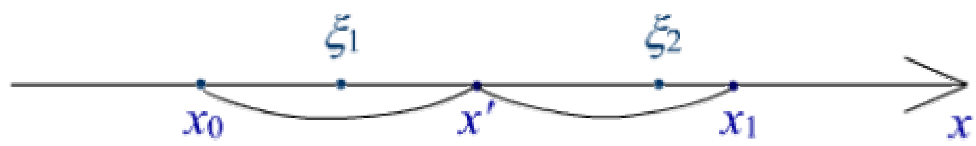


Рис. 4. Иллюстрация к доказательству теоремы о погрешности приближения функции интерполяционным многочленом первой степени

По теореме Ролля найдутся точки $\xi_1 \in (x_0, x')$ и $\xi_2 \in (x', x_1)$ такие, что

$$\varphi'(\xi_1) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'(\xi_2) = 0.$$

На этот раз применим теорему Ролля к функции φ' на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, согласно которой найдется точка $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ такая, что

$$\varphi''(\xi) = 0.$$

Но $L''_1(x)$ тождественно обращается в нуль на всей числовой оси, потому что L_1 является линейной функцией. Краткими вычислениями находим, что $[(x - x_0)(x - x_1)]'' = 2$. Следовательно, условие $\varphi''(\xi) = 0$ равносильно уравнению

$$0 = \varphi''(\xi) = f''(\xi) - 2K,$$

из которого видим, что

$$K = \frac{f''(\xi)}{2}.$$

Теперь находим оценку для $R_1(x')$

$$|R_1(x')| = |\varphi(x') + K(x' - x_0)(x' - x_1)| = |K|(x' - x_0)(x_1 - x') =$$

$$\frac{|f''(\xi)|}{2}(x' - x_0)(x_1 - x') \le \frac{M}{2}(x' - x_0)(x_1 - x'),$$

что ввиду произвольности $x' \in (x_0, x_1)$ заканчивает доказательство теоремы 1.

3. Погрешность приближения функции интерполяционным многочленом второй степени

Докажем сначала вспомогательную теорему.

Теорема 2 *Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[x_0, x_2]$ и L_2 - ее интерполяционный многочлен Лагранжа для точек x_0, x_1 и x_2. Тогда существует число K такое, что функция g,*

$$g(x) = f(x) - L_2(x) - K(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

удовлетворяет условиям

$$g(x_0) = g(x_1) = g(x_2) = 0 \quad \text{и} \quad g'(x_1) = 0.$$

Доказательство. Так как $L_2(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2$, то условия $g(x_0) = g(x_1) = g(x_2) = 0$ выполняются тривиально. Функция g дифференцируема на отрезке $[x_0, x_1]$, как и функция f. Условие $g'(x_1) = 0$ равносильно уравнению

$$f'(x_1) - L'_2(x_1) - K(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = 0,$$

из которого находим число K,

$$K = \frac{f'(x_1) - L_2'(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}.$$

и заканчиваем доказательство теоремы 2.

Теперь можем оценить погрешность приближения функции f ее интерполяционным многочленом Лагранжа L_2.

Теорема 3 *Пусть функция f четырежды дифференцируема на отрезке $[x_0, x_2]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $|f^{(4)}(x)| \le M$. Обозначим через L_2 интерполяционный многочлен Лагранжа функции f для точек x_0, x_1 и x_2 и положим*

$$K = \frac{f'(x_1) - L_2'(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}.$$

Тогда для погрешности $R_2(x) = f(x) - L_2(x)$ приближения функции f ее интерполяционным многочлениом Лагранжа L_2 справедлива оценка

$$|R_2(x) - K(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \le \frac{M}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x_2 - x), x \in [x_0, x_2].$$

Доказательство. Согласно обозначениям

$$R_2(x) - K(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = f(x) - L_2(x) - K(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = g(x).$$

Число K выбрано так, что по теореме 2 выполняется условие $g'(x_1) = 0$. Таким образом, функция g четырежды дифференцируема на отрезке $[x_0, x_2]$ и удовлетворяет условиям

$$g(x_0) = g(x_1) = g(x_2) = 0 \quad \text{и} \quad g'(x_1) = 0.$$

Выберем произвольно число C и обозначим

$$\varphi(x) = g(x) - C(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Функция φ, как и функция g, четырежды дифференцируема на отрезке $[x_0, x_2]$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'(x_1) = 0.$$

Зафиксируем произвольно $x' \in (x_0, x_2)$, $x' \neq x_1$. Пусть, например, $x' \in (x_0, x_1)$. Для $x' \in (x_1, x_2)$ рассуждения симметричны. Потребуем, чтобы выполнилось условие $\varphi(x') = 0$, которое равносильно равенству

$$C = \frac{g(x')}{(x'-x_0)(x'-x_1)^2(x'-x_2)}.$$

При таком выборе числа C функция φ обращается в нуль в точках x_0, x', x_1 и x_2 и $\varphi'(x_1) = 0$.

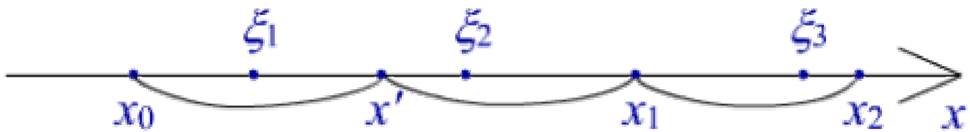


Рис. 5. Иллюстрация к доказательству теоремы 3

По теореме Ролля, примененной к функции φ, найдутся точки $\xi_1 \in (x_0, x')$, $\xi_2 \in (x', x_1)$ и $\xi_3 \in (x_1, x_2)$ такие, что

$$\varphi'(\xi_1) = \varphi'(\xi_2) = \varphi'(\xi_3) = 0.$$

Таким образом, функция φ' обращается в нуль в точках ξ_1, ξ_2, x_1 и ξ_3.

Рис. 6. Иллюстрация к доказательству теоремы 3.

На этот раз применим теорему Ролля к функции φ' на отрезке $[\xi_1, \xi_3]$, согласно которой найдутся точки $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_5 \in (\xi_2, x_1)$ и $\xi_6 \in (x_1, \xi_3)$ такие, что

$$\varphi''(\xi_4) = \varphi''(\xi_5) = \varphi''(\xi_6) = 0.$$

Рис. 7. Иллюстрация к доказательству теоремы 3.

По теореме Ролля, примененной к функции φ'' на отрезке $[\xi_4, \xi_6]$, найдутся точки $\xi_7 \in (\xi_4, \xi_5)$ и $\xi_8 \in (\xi_5, \xi_6)$ такие, что

$$\varphi'''(\xi_7) = \varphi'''(\xi_8) = 0.$$

Наконец, по теореме Ролля, примененной к функции φ''' на отрезке $[\xi_7, \xi_8]$, найдется точка $\xi \in (\xi_7, \xi_8)$ такая, что

$$\varphi^{(4)}(\xi) = 0.$$

Но $(L_2(x) + K(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2))^{(4)}$ тождественно обращается в нуль на всей числовой оси, потому что $L_2(x) + K(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ является многочленом третьей степени. Краткими вычислениями находим, что $[(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)]^{(4)} = 4!$. Следовательно, условие $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$ равносильно уравнению

$$0 = \varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!C,$$

из которого видим, что

$$C = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$

Теперь находим оценку для $R_2(x') - K(x' - x_0)(x' - x_1)(x' - x_2)$

$$|R_2(x') - K(x' - x_0)(x' - x_1)(x' - x_2)| = |g(x')| =$$

$$|\varphi(x') + C(x' - x_0)(x' - x_1)^2(x' - x_2)| = |C|(x' - x_0)(x' - x_1)^2(x_2 - x') =$$

$$\frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}(x'-x_0)(x'-x_1)^2(x_2-x') \le \frac{M}{4!}(x'-x_0)(x'-x_1)^2(x_2-x')$$

что ввиду произвольности $x' \in (x_0, x_2)$ заканчивает доказательство теоремы 3.

Лекция 31

1. Формула прямоугольников приближенного вычисления интегралов

Опишем метод приближенного вычисления интегралов Римана, основанный на замене подынтегральной функции f ее интерполяционным многочленом Лагранжа. Начнем с простейшего случая интерполяционного многочлена нулевой степени.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Середину отрезка $[a, b]$ обозначим через c, $c = (a + b)/2$. Интерполяционный многочлен нулевой степени L_0, , имеет вид

$$L_0(x) = f(c).$$

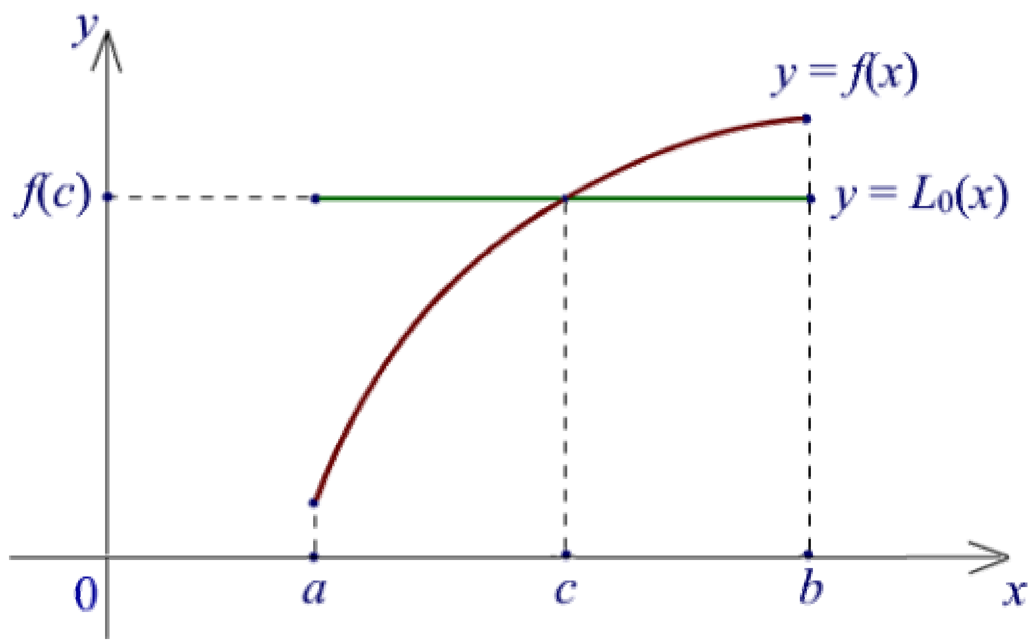


Рис. 1. Иллюстрация интерполяционного многочлена нулевой степени L_0, принимающего одинаковое с функцией f значение в точке c

Заменяя под знаком интеграла Римана на отрезке $[a, b]$ функцию f на L_0, получим приближенное значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_0(x)dx + r_0 = \int_a^b f(c)dx + r_0 = f(c)(b-a) + r_0 .$$

Здесь значение $f(c)(b - a)$ является приближенным значением интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$, а r_0 выражает погрешность приближения. Формула

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) + r_0 \quad (1)$$

называется *формулой прямоугольников* приближенного вычисления интеграла.

С точки зрения пользователя важно знать приближенное значение интеграла. С точки зрения теоретической математики еще важнее уметь оценивать погрешность приближенного значения.

Прежде чем найти оценку погрешности, создадим более общую формулу прямоугольников, обещающую значительно повысить точность приближения. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков равной длины. Пусть $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ - такое разбиение,

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \ k = 0,1,...,n.$$

Середину каждого из отрезков $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, обозначим через c_k,

$$c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = a + \frac{b-a}{n}\left(k - \frac{1}{2}\right), \ k = 1,2,...,n,$$

и на каждом из отрезков Δ_k применим формулу (1).

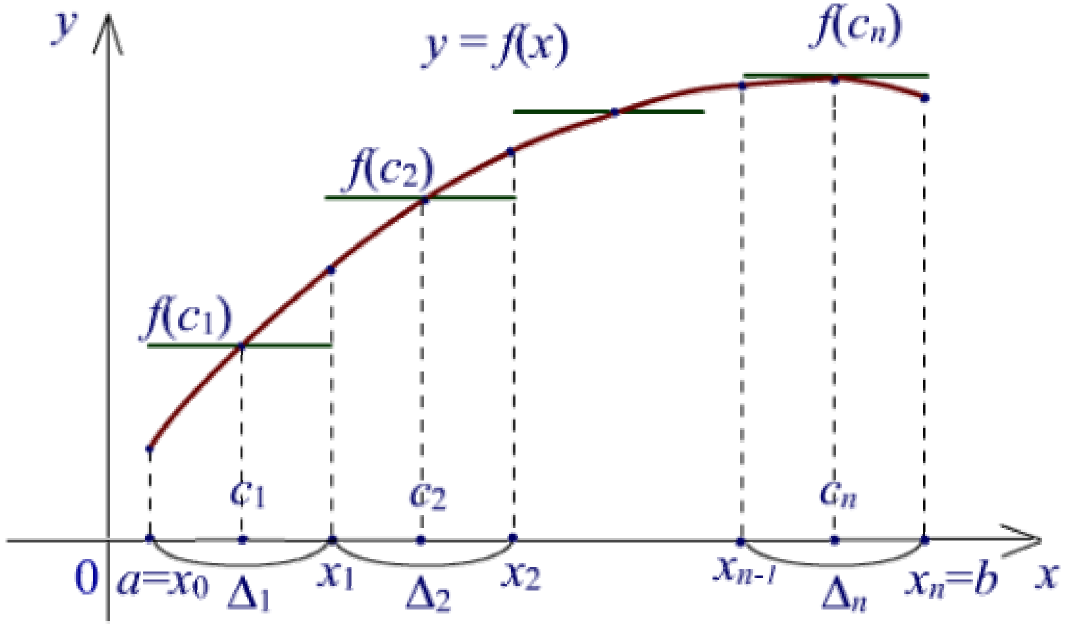


Рис. 2. Иллюстрация интерполяционного многочлена нулевой степени L_0, принимающего одинаковое с функцией f значение в каждой точке c_k.

В результате выводим формулу приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(c_k)dx + r_{0n} = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)|\Delta_k| + r_{0n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) + r_{0n}.$$

Здесь $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$ является приближенным значением интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$, а r_{0n} выражает погрешность приближения. Формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) + r_{0n}, \qquad (2)$$

$$c_k = a + \frac{b-a}{n}\left(k - \frac{1}{2}\right),\ k = 1,2,\ldots,n,$$

также называется *формулой прямоугольников* приближенного вычисления интеграла. Именно ее будем принимать основной формулой прямоугольников.

2. Оценка погрешности формулы прямоугольников

Оценим погрешность r_{0n} формулы прямоугольников (2).

Теорема 1 *Пусть функция f дважды дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ *и на этом отрезке выполняется неравенство* $|f''(x)| \le M$. *Тогда справедлива следующая оценка погрешности r_{0n} формулы прямоугольников приближенного вычисления интеграла Римана*

$$|r_{0n}| \le \frac{M(b-a)^3}{24n^2}.$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Оценим погрешность $r_0 = r_{01}$ формулы прямоугольников (1). По теореме о формуле Тейлора с остатком Лагранжа, примененной к функции f с точкой $x_0 = c = (a + b)/2$, для любой точки $x \in [a, b]$, $x \ne c$, найдется точка ξ, находящаяся между x и c, такая, что справедлива формула

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

Теперь, пользуясь этим разложением и формулой (1), произведем оценку

$$|r_{01}| = \left|\int_a^b \left(f(x) - L_0(x)\right)dx\right| =$$

$$\left|\int_a^b \left(f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2 - f(c) \right) dx \right| =$$

$$\left| \frac{f'(c)}{2}\left((b-c)^2 - (a-c)^2\right) + \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2\, dx \right| =$$

$$\left| \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2\, dx \right| \le \int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2}(x-c)^2\, dx \le \int_a^b \frac{M}{2}(x-c)^2\, dx =$$

$$\frac{M}{6}\left((b-c)^3 - (a-c)^3\right) = \frac{M}{6}\left(\frac{(b-a)^3}{8} + \frac{(b-a)^3}{8} \right) = \frac{M}{6}\frac{(b-a)^3}{4} = \frac{M(b-a)^3}{24},$$

что доказывает теорему 1 для $n = 1$.

Для произвольного n применим найденную оценку на каждой части $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, отрезка $[a, b]$ с заменой $b - a$ на длину $|\Delta_k|$ отрезка Δ_k, $|\Delta_k| = (b - a)/n$. Погрешность r_{0n} формулы прямоугольников на отрезке $[a, b]$ не превышает суммы погрешностей на каждом из отрезков Δ_k. Это соображение позволяет найти оценку

$$|r_0| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{24}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = n\frac{M}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{M(b-a)^3}{24n^2},$$

что заканчивает доказательство теоремы 1.

3. Формула трапеций приближенного вычисления интегралов

Перейдем к случаю интерполяционного многочлена Лагранжа первой степени. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Интерполяционный многочлен первой степени L_1, принимающий одинаковые с функцией f значение в точках a и b, имеет вид

$$L_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} = \frac{-f(a)(x-b)+f(b)(x-a)}{b-a}.$$

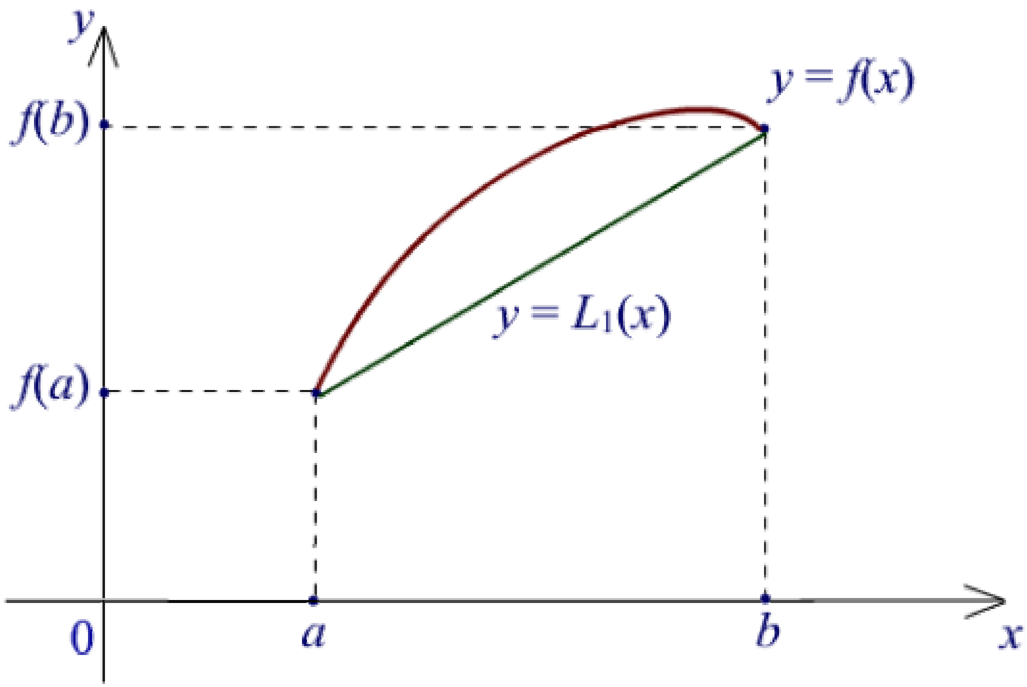


Рис. 3. Иллюстрация интерполяционного многочлена первой степени L_1, принимающего одинаковое с функцией f значение в точках a и b.

Заменяя под знаком интеграла Римана на отрезке $[a, b]$ функцию f на L_1, получим приближенное значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_1(x)dx + r_1 = \int_a^b \frac{-f(a)(x-b)+f(b)(x-a)}{b-a}dx + r_1 =$$

$$\frac{f(a)(a-b)^2 + f(b)(b-a)^2}{2(b-a)} + r_1 = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)+r_1 .$$

Здесь значение $(f(a) + f(b))/2(b - a)$ является приближенным значением интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$, а r_1 выражает погрешность приближения. Формула

(3) $$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)+r_1$$

называется *формулой трапеций* приближенного вычисления интеграла.

Прежде чем найти оценку погрешности приближения, создадим более общую формулу трапеций. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков равной длины. Пусть $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ - такое разбиение,

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \ \ k = 0,1,...,n.$$

На каждом из отрезков $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, применим формулу (3).

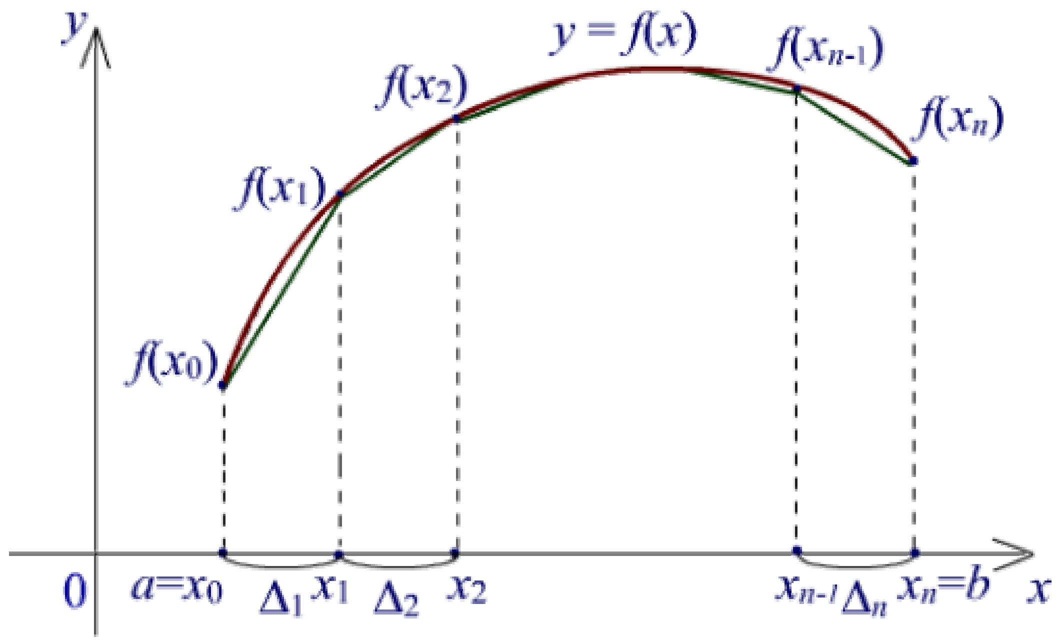


Рис. 4. Иллюстрация интерполяционного многочлена первой степени L_1, принимающего одинаковое с функцией f значение в точках x_k.

В результате выводим формулу приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{-f(x_{k-1})(x - x_k) + f(x_k)(x - x_{k-1})}{|\Delta_k|} dx + r_{1,n} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}|\Delta_k|+r_{1n}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}+r_{1,n}=$$

$$\frac{b-a}{n}\frac{1}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{k-1})+f(x_k)\right]+r_{1n}$$

$$\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]+r_{1n}.$$

Здесь

$$\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$

является приближенным значением интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$, а r_{1n} выражает погрешность приближения. Формула

(4) $$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]+r_{1n}$$

также называется *формулой трапеций* приближенного вычисления интеграла. Именно ее будем принимать основной формулой трапеций.

4. Оценка погрешности формулы трапеций

Оценим погрешность r_{1n} формулы трапеций (4).

Теорема 2 *Пусть функция f дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $|f''(x)| \le M$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности r_{1n} формулы трапеций приближенного вычисления интеграла Римана*

$$|r_{1n}| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Оценим погрешность $r_1 = r_{11}$ формулы трапеций (3). Применяя оценку

$$|R_1(x)| = |f(x) - L_1(x)| \le \frac{M}{2}(x-a)(x-b), \qquad a \le x \le b,$$

погрешности приближения функции f ее интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени L_1, произведем оценивание

$$|r_{11}| = \left|\int_a^b (f(x) - L_1(x))dx\right| = \left|\int_a^b R_1(x)dx\right| \le \int_a^b |R_1(x)|dx \le \int_a^b \frac{M}{2}(x-a)(b-x)dx.$$

В последнем интеграле совершим замену переменной по формуле

$$y = x - \frac{a+b}{2}$$

Тогда

$$x - a = y + \frac{b-a}{2}, \qquad b - x = \frac{b-a}{2} - y,$$

и интеграл легко вычисляется

$$\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y + \frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2} - y\right)dy = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left[\frac{(b-a)^2}{4} - y^2\right]dy =$$

$$\frac{(b-a)^3}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{(b-a)^3}{8}+\frac{(b-a)^3}{8}\right)=\frac{(b-a)^3}{6}.$$

Подставляя вычисленный интеграл в предыдущую цепочку неравенств, получим оценку

$$|r_{11}|\le\frac{M}{12}(b-a)^3,$$

что доказывает теорему 2 для $n = 1$.

Для произвольного n применим найденную оценку на каждой части $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, отрезка $[a, b]$ с заменой $b - a$ на длину $|\Delta_k|$ отрезка Δ_k, $|\Delta_k| = (b - a)/n$. Погрешность r_{1n} формулы трапеций на отрезке $[a, b]$ не превышает суммы погрешностей на каждом из отрезков Δ_k. Это соображение позволяет найти оценку

$$|r_{1n}|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{M}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3=n\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}=\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

что заканчивает доказательство теоремы 2.

Лекция 32

1. Формула Симпсона приближенного вычисления интегралов

Опишем метод приближенного вычисления интегралов Римана, основанный на замене подынтегральной функции f ее интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Середину отрезка $[a, b]$ обозначим через c, $c = (a + b)/2$. Интерполяционный многочлен второй степени L_2, принимающий одинаковые с функцией f значения в точках a, c и b, имеет вид

$$L_2(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} =$$

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left[f(a)(x-c)(x-b) - 2f(c)(x-c)(x-b) + f(b)(x-a)(x-c)\right].$$

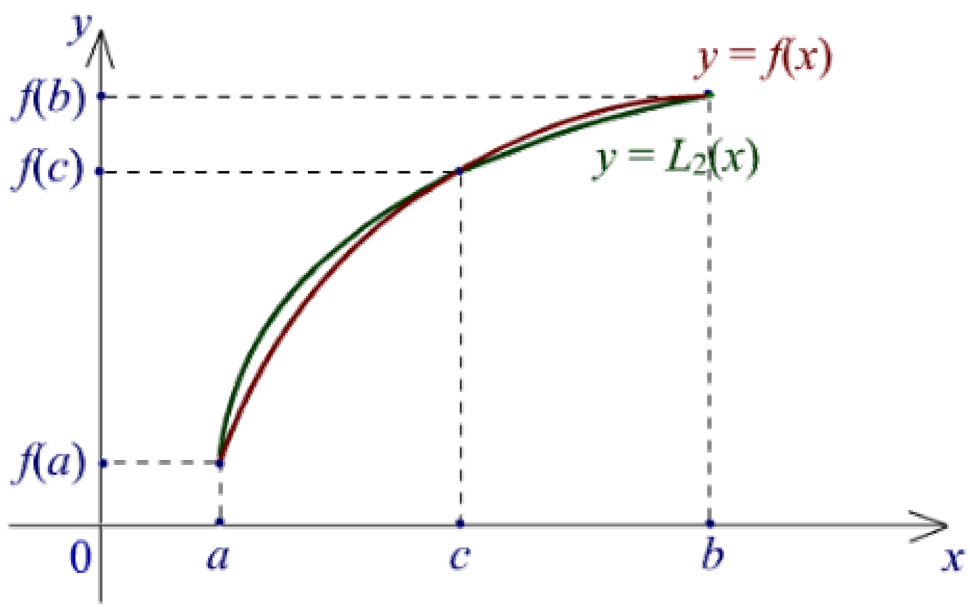


Рис. 1. Иллюстрация интерполяционного многочлена второй степени L_2

Заменяя под знаком интеграла Римана на отрезке $[a, b]$ функцию f на L_2, получим приближенное значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_2(x)dx + r_2 =$$

$$\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b [f(a)(x-c)(x-b) - 2f(c)(x-a)(x-b) + f(b)(x-a)(x-c)]dx + r_2 .$$

Совершим в интеграле замену переменной $y = x - c$. Тогда

$$x - a = y + \frac{b-a}{2} \text{ и } x - b = y - \frac{b-a}{2},$$

и вычисляем интеграл

$$\int_a^b [f(a)(x-c)(x-b)-2f(c)(x-a)(x-b)+f(b)(x-a)(x-c)]dx=$$

$$\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\left[f(a)y\left(y-\frac{b-a}{2}\right)-2f(c)\left(y+\frac{b-a}{2}\right)\left(y-\frac{b-a}{2}\right)+f(b)\left(y+\frac{b-a}{2}\right)y\right]dy=$$

$$f(a)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{(b-a)^3}{8}+\frac{(b-a)^3}{8}\right)-\frac{b-a}{4}\left(\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{(b-a)^2}{4}\right)\right)-$$

$$2f(c)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{(b-a)^3}{8}+\frac{(b-a)^3}{8}\right)-\frac{(b-a)^2}{4}(b-a)\right)+$$

$$f(b)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{(b-a)^3}{8}+\frac{(b-a)^3}{8}\right)+\frac{b-a}{4}\left(\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{(b-a)^2}{4}\right)\right)=$$

$$f(a)\frac{(b-a)^3}{12}+f(c)\frac{(b-a)^3}{3}+f(b)\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Подставляя вычисленный интеграл в предыдущее выражение, находим, что

(1) $$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)]+r_2.$$

Формула (1) называется *формулой Симпсона* приближенного вычисления интеграла. Здесь значение

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]$$

является приближенным значением интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$, а r_2 выражает погрешность приближения.

Прежде чем найти оценку погрешности, создадим более общую формулу Симпсона. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков равной длины. Пусть $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ - такое разбиение,

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \qquad k = 0,1,...,n.$$

Середину каждого из отрезков $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, обозначим через c_k,

$$c_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} = a + \frac{b-a}{n}\left(k-\frac{1}{2}\right), \ k = 1,2,...,n,$$

и на каждом из отрезков Δ_k применим формулу (1).

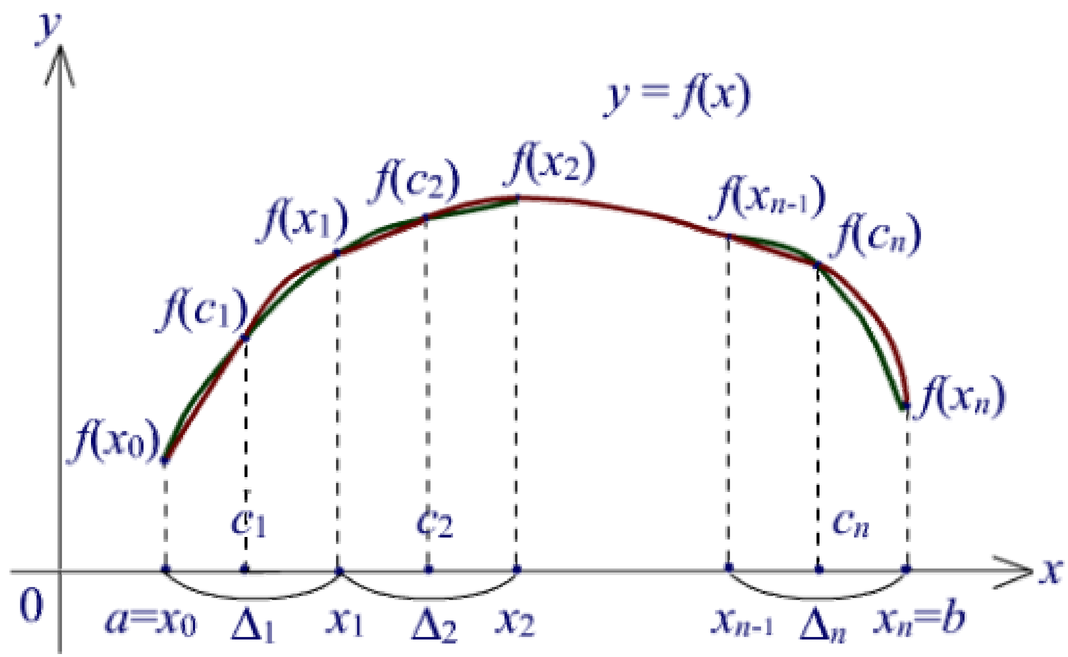


Рис. 2. Иллюстрация применения формулы Симпсона (1) на каждом из отрезков Δ_k

В результате выводим формулу приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{|\Delta_k|^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x_{k-1})(x-c_k)(x-x_k) - 2f(c_k)(x-x_{k-1})(x-x_k) + f(x_k)(x-x_{k-1})(x-c_k)]dx + r_{2n} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{|\Delta_k|^2} \frac{|\Delta_k|^3}{12} [f(x_{k-1}) + 4f(c_k) + f(x_k)] + r_{2n} = \frac{b-a}{6n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1} + 4f(c_k) + f(x_k))] + r_{2n} =$$

$$\frac{b-a}{6n}\left[f(x_0)+4f(c_1)+f(x_1)+f(x_1)+4f(c_2)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+4f(c_n)\right]+r_{2n}=$$

$$\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\right]+r_{2n}.$$

Здесь

$$\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\right]$$

является приближенным значением интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$, а r_{2n} выражает погрешность приближения. Формула

(2) $$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\right]+r_{2n},$$

$$x_k=a+\frac{b-a}{n}k,\quad k=0,1,2,\ldots,n,\qquad c_k=a+\frac{b-a}{n}\left(k-\frac{1}{2}\right),\quad k=1,2,\ldots,n,$$

также называется *формулой Симпсона* приближенного вычисления интеграла. Именно ее будем принимать основной формулой Симпсона.

2. Оценка погрешности формулы Симпсона

Оценим погрешность r_{2n} формулы Симпсона (2).

Теорема 1 *Пусть функция f четырежды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $|f^{(4)}(x)| \le M$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности r_{2n} формулы Симпсона приближенного вычисления интеграла Римана*

$$|r_{2n}| \le \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Оценим погрешность $r_2 = r_{21}$ формулы Симпсона (1). Предварительно вычислим интеграл

$$\int_a^b (x-a)(x-c)(x-b)dx, \qquad c = \frac{a+b}{2}.$$

Совершим в нем замену переменной $y = x - c$. Тогда

$$x - a = y + \frac{b-a}{2} \text{ и } x - b = y - \frac{b-a}{2}$$

и

$$\int_a^b (x-a)(x-c)(x-b)dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y + \frac{b-a}{2}\right) y \left(y - \frac{b-a}{2}\right) dy =$$

$$\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} y\left(y^2 - \frac{(b-a)^2}{4}\right) dy =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{(b-a)^4}{16} - \frac{(b-a)^4}{16}\right) - \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{(b-a)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4}\right) = 0.$$

Теперь применяя для K, определенного в теореме 3 лекции 30, оценку

$$|R_2(x) - K(x-a)(x-c)(x-b)| = |f(x) - L_2(x) - K(x-a)(x-c)(x-b)| \le$$

$$\frac{M}{4!}(x-a)(x-c)^2(b-x), \qquad x \in [a,b],$$

погрешности приближения функции f ее интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени L_2, произведем оценивание

$$|r_{21}| = \left|\int_a^b (f(x) - L_2(x))dx\right| = \left|\int_a^b R_2(x)dx\right| =$$

$$\left|\int_a^b (R_2(x) - K(x-a)(x-c)(x-b) + K(x-a)(x-c)(x-b))dx\right| =$$

$$\left|\int_a^b (R_2(x) - K(x-a)(x-c)(x-b))dx\right| \le$$

$$\int_a^b |R_2(x) - K(x-a)(x-c)(x-b)|dx \le \int_a^b \frac{M}{4!}(x-a)(x-c)^2(b-x)dx.$$

В последнем интеграле совершим замену переменной

$$y = x - c$$

и легко вычислим его

$$\int_a^b (x-a)(x-c)^2(b-x)dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y+\frac{b-a}{2}\right)y^2\left(\frac{b-a}{2}-y\right)dy =$$

$$\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(\frac{(b-a)^2}{4}-y^2\right)y^2dy =$$

$$\frac{(b-a)^2}{12}\left(\frac{(b-a)^3}{8}+\frac{(b-a)^3}{8}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{(b-a)^5}{32}+\frac{(b-a)^5}{32}\right)=\frac{(b-a)^5}{120}\,.$$

Подставляя вычисленный интеграл в предыдущую цепочку неравенств, получим оценку

$$|r_{21}| \le \frac{M}{4!}\frac{(b-a)^5}{120}=\frac{M(b-a)^5}{2880}\,,$$

что доказывает теорему 1 для $n = 1$.

Для произвольного n применим найденную оценку на каждой части $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, отрезка $[a, b]$ с заменой $b - a$ на длину $|\Delta_k|$ отрезка Δ_k, $|\Delta_k| = (b - a)/n$. Погрешность r_{2n} формулы Симпсона на отрезке $[a, b]$ не превышает суммы погрешностей на каждом из отрезков Δ_k. Это соображение позволяет найти оценку

$$|r_{2n}| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{M}{2880}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5 = n\frac{M}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^5}=\frac{M(b-a)^5}{2880n^4}\,,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Вопросы для тестирования и контроля

Лекция 1.

1. Пусть A и B - множества. Какое из следующих множеств содержит A
   - a) $A \cup B$;
   - b) $A \cap B$
   - c) $A \backslash B$
2. Пусть A и B - множества. Какие из следующих множеств содержатся в A
   - a) $A \cup B$;
   - b) $A \cap B$;
   - c) $A \backslash B$
3. Пусть площади множеств A, B и $A \cap B$ равны 5, 7 и 2. Чему равна площадь $A \cup B$?
4. Пусть отображение $f: X \to Y$, $Y=[0,1]$, задается формулой $f(x)=x^2$. Для каких множеств X функция f является отображением на?
   - a) $X=[0,1]$;
   - b) $X=[-1,1]$;
   - c) $X=[-0.5,0.5]$;
   - d) $X=[-1,-0.5] \cup [0,0.5]$
5. Пусть отображение $f: X \to Y$, $Y=[0,1]$, задается формулой $f(x)=x^2$. Для каких множеств X функция f является взаимно однозначным отображением?
   - a) $X=[0,1]$;
   - b) $X=[-1,1]$;

c) X=[-0.5,0.5];

d) X=[-1,-0.5] $\cup$ [0,0.5]

6. Пусть отображение $f : X \to Y$, $X=[0,+\infty)$, $Y=[0,+\infty]$,задается формулой $f(x) = x^{\sqrt{2}}$. Какой формулой задается отображение f^{-1} , обратное к f?
7. Пусть отображения $f : X \to X$, и $g : X \to X$, $X=(-\infty,+\infty)$, задаются формулами $f(x)=x^2$ и $g(x)=\sin x$. Построить сложные отображения $f \circ g$ и $g \circ f$.

Лекция 2

1. Какое из следующих множеств является счетным

   a) $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{Q}\}$
   b) $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{R}\}$
   c) $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$

2. Пусть $X_{ik}, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ - счетные множества. Будет ли счетным множество
$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{jk} .$$

3. Пусть множество X состоит из всех бесконечных десятичных дробей
$$x = 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...,$$
   не имеющих в своем разложении цифр 9 и 8. Будет ли множество X счетным?

4. Пусть $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}_0, x_2 \in \mathbb{R}_0\}$, где $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \cap [0,1)$. Являются ли множества X и $\mathbb{R}_0$ равномощными?

Лекция 3

1. Пусть X и Y - ограниченные множества. Какая из следующих формул справедлива
   a) $\sup(X \bigcup Y) = \sup X + \sup Y$
   b) $\sup(X \bigcup Y) = \sup X \sup Y$
   c) $\sup(X \bigcup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$
2. Пусть X и Y - ограниченные множества, $X \subset Y$. Какое из следующих соотношений справедливо
   a) $\sup X \le \sup Y$
   b) $\sup X \ge \sup Y$
   c) $\sup X = -\sup Y$
3. Пусть X и Y - ограниченные множества, $X \subset Y$. Какое из следующих соотношений справедливо
   a) $\inf X \le \inf Y$
   b) $\inf X \ge \inf Y$
   c) $\inf X = -\inf Y$
4. Пусть M_1 и M_2 - верхние границы множества X. Верно ли, что $M_1 + M_2$ тоже является верхней границей множества X ?
5. Верно ли, что если $\alpha = \sup X$, то $\alpha \in X$?
6. Пусть $X = \{x \in R : x^2 < 2\}$. Найти $\sup X$ и $\inf X$.
7. Пусть $X = \{x \in Q : x^2 < 2\}$. Найти $\sup X$ и $\inf X$.
8. Пусть $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. Найти $\sup X$ и $\inf X$.

Лекция 4

1. Пусть даны ограниченные последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ Образуем соединенную последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$ Будет ли соединенная последовательность ограниченной?
2. Пусть последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ не убывают. Будет ли соединенная последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$ обязательно неубывающей?
3. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = p$, $l \neq p$ Будет ли соединенная последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$ сходящейся?
4. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = l$. Будет ли соединенная последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$ сходящейся?

Лекция 5

1. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$, $n \geq 1$. Верно ли, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = +\infty.$$
2. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$, $n \geq 1$. Верно ли, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|} = +\infty.$$
3. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Верно ли, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0.$$
4. Пусть $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ или $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$?
5. Пусть существует $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$. Верно ли, что существуют $\lim_{n\to\infty} x_n$ и $\lim_{n\to\infty} y_n$?
6. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ сходится, а последовательность $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ расходится. Как ведет себя сумма этих двух последовательностей?
7. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n$. Верно ли, что $x_n < y_n$ для всех *n*, начиная с некоторого номера n_0?

Лекция 6

a. Пусть $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$?

b. Пусть $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$?

c. Пусть $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 1$. Верно ли, что

   a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = 2$;

   b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n) = 1$.

d. Пусть $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 1$. Верно ли, что

   a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = 2$;

   b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n) = 1$.

e. Пусть $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, а $\lim_{n\to\infty} y_n = -1$. Верно ли, что

   a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = 0$;

   b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n) = -1$.

Лекция 7

1. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ обладает свойством
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \quad \left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon.$$
Является ли это условие
    a) необходимым;
    b) достаточным;
    c) необходимым и достаточным;
    d) ни необходимым, ни достаточным условием сходимости последовательности?
2. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ограничена. Можно ли из нее выделить фундаментальную подпоследовательность?
3. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ монотонна и ограничена. Является ли она фундаментальной?
4. Пусть последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ фундаментальна. Можно ли из нее выделить монотонную подпоследовательность?
5. Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся. Сходится ли ряд $\sum (a_n + b_n)$?
6. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum b_n$ расходится. Сходится ли ряд $\sum (a_n + b_n)$
7. Пусть $a_n \geq 0$ и $b_n \geq 0, n \geq 1$, и ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся. Сходится ли ряд $\sum a_n b_n$?
8. Пусть $q, |q| < 1$ - знаменатель геометрической прогрессии. При каком условии на q частные суммы геометрического ряда $\sum bq^{n-1}$ образуют монотонную последовательность?

Лекция 8

1. Пусть для всех $n \geq 1$ выполняются неравенства
$$|a_{n+1}| \leq |b_n| \leq |a_n|.$$
Верно ли, что ряды $\sum |a_n|$ и $\sum |b_n|$ сходятся или расходятся одновременно?

2. Пусть
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 1$$
и ряд $\sum |b_n|$ сходится. Верно ли, что ряд $\sum |a_n|$ обязательно сходится?

3. Пусть
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 1$$
и ряд $\sum |b_n|$ сходится. Верно ли, что ряд $\sum |a_n|$ обязательно сходится?

4. Предположим, что
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1.$$
Верно ли, что числовой ряд $\sum |a_n|$ сходится?

5. Предположим, что
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1.$$
Верно ли, что числовой ряд $\sum |a_n|$ расходится?

6. Пусть для всех $n \geq 1$ справедливы неравенства

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le l.$$

Верно ли, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le l$?

Лекция 9

1. Пусть один из двух рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ сходится, а другой - расходится. Можно ли утверждать, что ряд $\sum a_n$
   a) сходится;
   b) абсолютно сходится;
   c) условно сходится;
   d) расходится.
2. Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся. Можно ли утверждать, что ряд $\sum (a_n + b_n)$
   a) сходится;
   b) абсолютно сходится;
   c) условно сходится;
   d) расходится.
3. Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, а ряд $\sum b_n$ условно сходится. Можно ли утверждать, что ряд $\sum (a_n + b_n)$
   a) сходится;
   b) абсолютно сходится;
   c) условно сходится;
   d) расходится.
4. Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ условно сходятся. Можно ли утверждать, что ряд $\sum (a_n + b_n)$
   a) сходится;
   b) абсолютно сходится;
   c) условно сходится;
   d) расходится.
5. Пусть выполняются два условия:
   ряд $\sum b_n$ сходится;
   последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ монотонна и сходится к 0 при $n \to \infty$

   Верно ли, что ряд $\sum a_n b_n$ сходится?

6. Пусть ряд $\sum a_n$ условно сходится. Можно ли утверждать, что ряд $\sum (-1)^{n-1} a_n$ сходится?

Лекция 10

1. Пусть числовой ряд $\sum a_n$ условно сходится. Можно ли переставить члены ряда так, чтобы частные суммы нового ряда стремились к $+\infty$?
2. Пусть ряд
$$\sum (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k})$$
сходится. Верно ли, что ряд $\sum a_n$ обязательно сходится?
3. Пусть бесконечное произведение $\prod a_n$ сходится. Верно ли, что
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$
4. Пусть $a_n > -1, n \geq 1,$ и числовой ряд $\sum a_n$ сходятся. Верно ли, что бесконечное произведение $\prod (1+a_n)$ сходится?

Лекция 11

1. Какие из следующих функций имеют предел в точке 0 на множестве их определения
    a) $y = x$;
    b) $y = \frac{1}{x}$;
    c) $y = e^x$;
    d) $y = \log x$;
    e) $y = \operatorname{tg} x$;
    f) $y = \operatorname{ctg} x$;
    g) $y = |x|$;
2. Пусть множество X состоит из одной точки x_0, $X = \{x_0\}$, и функция f определена на X. Будет ли функция f непрерывной в точке x_0 на множестве X
3. Пусть
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x - \textit{рациональное число} \\ 0, & \textit{если } x - \textit{иррациональное число.} \end{cases}$$
Будет ли функция φ непрерывной в какой-либо точке?
4. Может ли композиция разрывных функций быть непрерывной в точке?
5. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция g разрывна в точке x_0. Может ли функция $f + g$ быть непрерывной в точке ?
6. Пусть функции f и g разрывны в точке x_0. Может ли функция $f + g$ быть непрерывной в точке x_0?
7. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция g разрывна в точке x_0. Может ли функция fg быть непрерывной в точке x_0?
8. Пусть функция f разрывна в точке x_0. Может ли функция f^2 быть непрерывной в точке x_0?

Лекция 12

1. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \ |x - x_0| < \delta \text{ и } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$
Верно ли, что функция f непрерывна в точке x_0?

2. Пусть
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1 \\ 0, x = 1. \end{cases}$$

Является ли точка x_0=1 для функции f
   a) точкой непрерывности;
   b) точкой устранимого разрыва;
   c) точкой разрыва 1 рода;
   d) точкой разрыва 2 рода.

3. Пусть функция f имеет в точке x_0 разрыв 1 рода. Верно ли, что функция $y=g(x)=\sin f(x)$ обязательно разрывна в точке x_0?

4. Пусть функция f имеет в точке x_0 разрыв 2 рода. Верно ли, что функция $y=g(x)=\sin f(x)$ обязательно разрывна в точке x_0?

5. Пусть функция f имеет в точке x_0 разрыв 1 рода. Верно ли, что функция $y=g(x)=e^{f(x)}$ обязательно разрывна в точке x_0?

6. Пусть функция f имеет в точке x_0 разрыв 2 рода. Верно ли, что функция $y=g(x)=e^{f(x)}$ обязательно разрывна в точке x_0?

7. Пусть функции f, g и h бесконечно малы при $x \to x_0$ и
$$f(x)=o(g(x)) \text{ и } g(x)=o(h(x))$$
Верно ли, что $f(x)=o(h(x))$?

8. Пусть функции f, g и h бесконечно малы при $x \to x_0$ и

$$f(x)=O\,(g(x)) \text{ и } g(x)=O\,(h(x))$$

Верно ли, что $f(x)=O\,(h(x))$?

9. Пусть функции f, g и h бесконечно малы при $x \to x_0$ и

$$f(x)=o\,(g(x)) \text{ и } g(x)=O\,(h(x))$$

Верно ли, что $f(x)=o\,(h(x))$?

Лекция 13

1. Какие из следующих функций равномерно непрерывны на R
   - a) $f(x)=x$;
   - b) $f(x)=e^x$;
   - c) $f(x)=\sin x$;
   - d) $f(x)=\sin^2 x$;
   - e) $f(x)=\sin x^2$;
2. Пусть функции f и g равномерно непрерывны на множестве X. Верно ли, что функция $f+g$ обязательно является равномерно непрерывной на множестве X?
3. Пусть функция f непрерывна и ограничена на множестве R. Верно ли, что обязательно является равномерно непрерывной на R?
4. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве X. Верно ли, что f обязательно ограничена на X?
5. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве X. Верно ли, что функция $y=g(x)=f^2(x)$ обязательно равномерно непрерывна на X?
6. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве X. Верно ли, что функция $y=g(x)=\sin f$ обязательно равномерно непрерывна на X?
7. Пусть функция f непрерывна и ограничена на множестве X и достигает на X своего максимума α и минимума β. Верно ли, что f обязательно принимает значение
$$\frac{\alpha+\beta}{2}$$
в некоторой точке $x_0 \in X$?

Лекция 14

1. Пусть функция f непрерывна на R,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=1.$$

Принимает ли функция промежуточные значения между 0 и 1?

2. Какие из следующих функций имеют обратные функции на отрезке [0,1]
   a) $f(x)=x,\quad X=[0,1];$
   b) $f(x)=|x|,\quad X=[-1,1];$
   c) $f(x)=x^2,\quad X=[-1,1];$
   d) $f(x)=\log x,\quad X=[1,e];$
   e) $f(x)=\sin x,\quad X=[0,\pi];$
3. Какие из следующих функций дифференцируемы в точке $x_0=0$
   a) $f(x)=|x|;$
   b) $f(x)=|\sin x|;$
   c) $f(x)=|x^3|;$
   d) $f(x)=\sqrt{|x|};$
4. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0)=g(x_0)$ и $f(x)<g(x)$ для $x>x_0$. Верно ли, что обязательно справедливо неравенство

$$f'(x_0)<g'(x_0);$$

5. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0)=g(x_0)$ и $f(x)<g(x)$ для $x>x_0$. Верно ли, что обязательно справедливо неравенство

$$f'(x_0)\le g'(x_0);$$

6. Пусть функция f непрерывна на отрезке [—1,1] и дифференцируема в точке 0. Положим

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x};$$

Верно ли, что функция g обязательно ограничена на $[-1,0)\cup(0,1]$?

Лекция 15

1. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, $f(x) \ge 0$. Верно ли, что функция $y = \sqrt{f(x)}$ обязательно дифференцируема в точке x_0?
2. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, $f(x) > 0$. Верно ли, что функция $y = \sqrt{f(x)}$ обязательно дифференцируема в точке x_0?
3. Пусть $y = f(x) = x^3$. Является ли обратная функция f^{-1} дифференцируемой во всех точках $x \in R$?
4. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ непрерывна, но не дифференцируема в точке y_0, $y_0 = f(x_0)$. Верно ли, что композиция $g \circ f$ может оказаться дифференцируемой в точке x_0?
5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, но не дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0, $y_0 = f(x_0)$. Верно ли, что композиция $g \circ f$ может оказаться дифференцируемой в точке x_0?
6. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, но не дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ непрерывна, но не дифференцируема в точке y_0, $y_0 = f(x_0)$. Верно ли, что композиция $g \circ f$ может оказаться дифференцируемой в точке x_0?
7. Пусть функция f имеет локальный максимум в точке x_0 и существует односторонний предел
$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$
Верно ли, что $f'(x_0 - 0) \ge 0$?
8. Пусть функция f имеет локальный максимум в точке x_0 и существует односторонний предел
$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$
Верно ли, что $f'(x_0 + 0) \le 0$?

Лекция 16

1. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям:непрерывны на отрезке $[a,b]$;дифференцируемы на интервале (a,b) $g(a)\neq g(b)$ и $f'(x)$ и $g'(x)$ не обращаются в 0 одновременно на $[a,b]$.
   Верно ли, что обязательно найдется точка $c\in(a,b)$ такая, что
   $$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$
2. Какую из следующих функций g следует выбрать в теореме Коши о среднем значении, чтобы она превратилась в теорему Лагранжа о среднем значении
   a) $g(x)=x$;
   b) $g(x)=|x|$;
   c) $g(x)=f(x)$;
3. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям:
   дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0;
   $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$;
   существует один из пределов

(а) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)g^2(x)}{g'(x)}=l.$$

(б) $$\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)f^2(x)}{f'(x)}=l.$$

В каком из случаев предел
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$$
существует и равен $-l$.

4. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям:
   дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0;

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$;
существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) g^2(x)}{g'(x) f(x)} = l.$$

Верно ли, что предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$$

существует и равен e^{-l}.

5. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям :
дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0;
$f(x) > 0, \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$;
существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) g^2(x)}{g'(x) f(x)} = l.$$

Верно ли, что предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$$

существует и равен e^{-l}

6. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям:
дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0;
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;
существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) g^2(x)}{g'(x) f(x)} = l.$$

Верно ли, что предел

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$

существует и равен e^{-l}.

7. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям:
дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0;
$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$;
существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}f'(x)}{e^{g(x)}g'(x)}=l>0.$$

Верно ли, что предел

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$$

существует и равен $\log l$.

8. Пусть $f(x)=x$ и $g(x)=\sqrt{x^2+1}$.В каком из следующих пределов применение правила Лопиталя эффективно приводит к ответу

a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}$;

Лекция 17.

1. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ всюду, за исключением конечного числа точек. Верно ли, что функция f обязательно является строго возрастающей на (a,b)?
2. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ всюду, за исключением счетного числа точек. Верно ли, что функция f обязательно является строго возрастающей на (a,b)?
3. Пусть функция α бесконечно мала при $x \to x_0$ и дифференцируема в δ-окрестности точки x_0, за исключением точки x_0. Верно ли, что функция
$$f(x)=\alpha(x)(x-x_0)^2$$
обязательно дважды дифференцируема в δ-окрестности точки x_0?
4. Пусть функция f дифференцируема $(n+1)$ раз в δ-окрестности точки x_0 и остаток Лагранжа в формуле Тейлора равен
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}.$$
Верно ли, что $f^{(n+1)}(c)(x-x_0)$ стремится к 0 при $x \to x_0$?
5. Предположим, что функция f трижды дифференцируема в точке x_0 и удовлетворяет условиям:
$f'(x_0)=f''(x_0)=0$;
$f'''(x_0)>0$.
Какое из следующих утверждений можно высказать о функции f
   a) имеет локальный максимум в точке x_0;
   b) имеет локальный минимум в точке x_0;
   c) не имеет локального экстремума в точке x_0;
   d) нельзя дать достоверного ответа.
6. Предположим, что функция f четырежды дифференцируема в точке x_0 и удовлетворяет условиям:

$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$;

$f^{(4)} > 0$.

Какое из следующих утверждений можно высказать о функции f

a) имеет локальный максимум в точке x_0;

b) имеет локальный минимум в точке x_0;

c) не имеет локального экстремума в точке x_0;

d) нельзя дать достоверного ответа.

7. Предположим, что функция f бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0 и все ее производные любого порядка в точке x_0 обращаются в 0.

Какое из следующих утверждений можно высказать о функции f

a) имеет локальный максимум в точке x_0;

b) имеет локальный минимум в точке x_0;

c) не имеет локального экстремума в точке x_0;

d) нельзя дать достоверного ответа.

Лекция 18.

1. Пусть A и B - выпуклые множества. Какое из следующих множеств обязательно выпукло

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

c) $A \setminus B$.

2. Какое из следующих множеств не является выпуклым ($a > 0$, $b > 0$, $p > 0$)

a)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1;$$

b)
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \le 1;$$

c)
$$y^2 \le 2px.$$

3. Какие из следующих функций выпуклы на своих множествах определения

a) $y=\sin x$, $0 \le x \le 2\pi$;

b) $y=\sin x$, $\pi/2 \le x \le 5\pi/2$;

c) $y=x$, $-\infty \le x \le \infty$;

d) $y=x^2$, $-\infty \le x \le \infty$;

e) $y=x^3$, $-\infty \le x \le \infty$;

f) $y=|x|, \qquad -\infty \le x \le \infty;$

g) $y=||x|-1|, \qquad -\infty \le x \le \infty;$

h) $y=||x|-1|, \qquad 0 \le x \le \infty.$

4. Применим ли критерий выпуклости к функции $y=|x|$?
5. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема и выпукла на отрезке $[a, b]$. Будет ли функция $y=f'(x)$ обязательно выпуклой на $[a,b]$?
6. Приведите пример функции, которая выпукла на вещественной оси вместе со своими производными любого порядка.
7. Для каких натуральных n функция $y=x^n$ является выпуклой на вещественной оси?
8. Для каких натуральных n функция $y=x^n$ имеет точку перегиба $x=0$?
9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ выпуклы на отрезке $[a,b]$. Какая из следующих функций обязательно выпукла на $[a,b]$
   a) $f(x)+g(x)$;
   b) $f(x)-g(x)$;
   c) $f(x)g(x)$.
10. Пусть функция $y=f(x)$ выпукла на отрезке $[a,b]$. Будет ли функция $y=-f(x)$ на этом отрезке
   a) выпуклой;
   b) вогнутой;
   c) иметь точки перегиба.

Лекция 19.

1. Пусть функция f имеет первообразную на интервале (a,b) и $c \in (a,b)$. Существует ли первообразная F функции f такая, что $F(c) = 0$.

2. Пусть функция f имеет первообразную на интервалах (a,c) и (c,b). Верно ли, что функция f обязательно имеет первообразную на интервале (a,b)?

3. Пусть функция f имеет первообразную F на интервале (a,b) и на этом интервале $f(x) \geq 0$. Можно ли утверждать, что на интервале (a,b) функция F

   a) не убывает;

   b) не возрастает;

   c) не монотонна;

   d) может обладать любым из свойств.

4. Пусть функция f имеет первообразную F на интервале (a,b) и на этом интервале f не убывает. Верно ли, что функция F выпукла на интервале (a,b)?

5. Пусть функция f является многочленом степени n. Можно ли утверждать, что первообразная F функции f

   a) является многочленом степени n;

   b) является многочленом степени $(n\text{-}1)$;

   c) является многочленом степени $(n+1)$;

   d) не является многочленом.

6. Пусть функция f имеет первообразную на отрезке $[a,b]$. Верно ли, что найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

7. Пусть функция f имеет первообразную на отрезке $[-a,a]$, которая является четной функцией на отрезке $[-a,a]$. Можно ли утверждать, что на отрезке $[-a,a]$ функция f

   a) является четной;

   b) является нечетной;

   c) не является ни четной, ни нечетной;

   d) может обладать любыми свойствами.

Лекция 20.

1. Пусть $\Delta = [a,b]$. Можно ли представить характеристическую функцию χ_Δ как сумму конечного числа характеристических функций отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$

$$\chi_\Delta = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Delta_k}.$$

2. Пусть даны отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$. Верно ли, что обязательно существует отрезок Δ такой, что

$$\chi_\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Delta_n}.$$

3. Верно ли, что сходящаяся в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ сумма ряда $\sum f_n$, состоящая из ступенчатых функций f_n, обязательно является ступенчатой функцией?
4. Пусть f - ступенчатая функция. Будет ли функция $y = e^{f(x)}$ обязательно ступенчатой функцией?
5. Пусть f - ступенчатая функция. Какие из следующих неравенств обязательно справедливы

   a) $\left|\int_R f(x)dx\right| \le \int_R |f(x)|dx$;

   b) $\left|\int_R f(x)dx\right| \le \int_R f^2(x)dx$;

   c) $\left|\int_R f(x)dx\right| \le \int_R f^+(x)dx$;

   d) $\int_R f^+(x)dx \le \int_R |f(x)|dx.$

6. Пусть f и g - ступенчатые функции и для всех $x \in R$ справедливо неравенство $f(x) \le g(x)$. Верно ли, что обязательно выполняется неравенство

$$\int_R f^2(x)dx \le \int_R g^2(x)dx.$$

7. Пусть f и g - ступенчатые функции и для всех $x \in R$ справедливо неравенство $|f(x)| \le |g(x)|$. Верно ли, что обязательно выполняется неравенство

$$\int_R f^2(x)dx \le \int_R g^2(x)dx.$$

Лекция 21.

1. Пусть функция f непрерывна на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Будет ли функция $f\chi_{[a,b]}$ обязательно непрерывной на $\mathbb{R}$?
2. Пусть функция f непрерывна на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Будет ли функция $f\chi_{[a,b]}$ обязательно ограниченной на $\mathbb{R}$?
3. Пусть функции f и g финитны и ограничены. Какие из следующих неравенств обязательно справедливыа) $\overline{I}(f-g) \le \overline{I}(f) - \overline{I}(g)$; b) $\overline{I}(f-g) \le \overline{I}(f) - \underline{I}(g)$; c) $\underline{I}(f-g) \ge \underline{I}(f) - \underline{I}(g)$; d) $\underline{I}(f-g) \ge \underline{I}(f) - \overline{I}(g)$;
4. Пусть функции f и g финитны и ограничены и

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) = 1,$$
$$\overline{I}(g) - \underline{I}(g) = 1,$$
$$\overline{I}(f+g) = \overline{I}(f) + \overline{I}(g) - 2.$$

Будет ли функция f+g обязательно интегрируемой по Риману?

Лекция 22.

1. Пусть функция f не интегрируема по Риману и $\alpha \neq 0$. Будет ли функция αf обязательно неинтегрируемой по Риману?
2. Пусть функция f интегрируема по Риману, а функция g не интегрируема по Риману. Будет ли функция $f+g$ обязательно неинтегрируемой по Риману?
3. Пусть функции f и g не интегрируемы по Риману. Будет ли функция $f+g$ обязательно неинтегрируемой по Риману?
4. Пусть функция f интегрируема по Риману на множестве E и $E_1 \subset E_2$. Будет ли функция f обязательно интегрируемой на множестве E_1?
5. Пусть функция f интегрируема по Риману на множествах E_1 и E_2. Будет ли функция f обязательно интегрируемой на множестве $E_1 \cap E_2$?
6. Пусть функция f интегрируема по Риману на каждом из множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$. Будет ли функция f обязательно интегрируемой по Риману на множестве $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$?
7. Пусть функция $|f|$ интегрируема по Риману. Будет ли обязательно функция f интегрируемой по Риману?
8. Пусть функции f и g интегрируемы по Риману и функция $h=\max\{f,g\}$ задается формулой
$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq g(x) \\ g(x), \text{ если } f(x) \leq g(x) \end{cases}.$$
Будет ли функция h обязательно интегрируемой по Риману?
9. Пусть функции f и g интегрируемы по Риману и функция $h=\min\{f,g\}$ задается формулой
$$h(x) = \begin{cases} g(x), \text{ если } f(x) \geq g(x) \\ f(x), \text{ если } f(x) \leq g(x). \end{cases}$$
Будет ли функция h обязательно интегрируемой по Риману?

Лекция 23.

1. Пусть для произвольной последовательности $P_1,P_2,\ldots,P_n,\ldots$ разбиений отрезка $[a,b]$ такой, что $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}P_n = 0$, и произвольной последовательности наборов точек $\Xi_1,\Xi_2,\ldots,\Xi_n,\ldots$ выполняется условие
$$\lim_{n\to\infty} S(P_n,\Xi_n;f) = I.$$
Является ли это условие
   a) необходимым;
   b) достаточным;
   c) необходимым и достаточным;
   d) ни необходимым, ни достаточным

   для интегрируемости по Риману функции f на отрезке $[a,b]$?
2. Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Верно ли, что обязательно выполняется условие
$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall P_1,P_2\forall\Xi_1,\Xi_2\, 0<\mathrm{diam}P_1<\delta \text{ и } 0<\mathrm{diam}P_2<\delta \Rightarrow$$
$$\left|S(P_1,\Xi_1;f)-S(P_2,\Xi_2;f)\right|<\varepsilon.$$
3. Пусть для функции f на отрезке $[a,b]$ выполняется условие
$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall P_1,P_2\forall\Xi_1,\Xi_2\, 0<\mathrm{diam}P_1<\delta \text{ и } 0<\mathrm{diam}P_2<\delta \Rightarrow$$
$$\left|S(P_1,\Xi_1;f)-S(P_2,\Xi_2;f)\right|<\varepsilon.$$
Верно ли, что функция f обязательно интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$?
4. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ - разбиение отрезка $[a,b]$. Обозначим
$$m_k=\inf_{x\in\Delta_k} f(x), \Delta_k=[x_{k-1},x_k], k=1,2,\ldots n.$$
$$\underline{S}(P;f)=\sum_{k=1}^{n} m_k\left|\Delta_k\right|.$$
Предположим, что P', $P'\supset P$, - более мелкое по сравнению с P разбиение отрезка $[a,b]$. Какое из следующих условий обязательно выполняется
   a) $\underline{S}(P';f)\le \underline{S}(P;f)$;
   b) $\underline{S}(P';f)\ge \underline{S}(P;f)$;

c) $\underline{S}(P';f)=\underline{S}(P;f)$;

d) возможно любое из соотношений.

5. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ - разбиение отрезка $[a,b]$. Обозначим

$$M_k=\sup_{x\in\Delta_k} f(x),\Delta_k=[x_{k-1},x_k],k=1,2,\ldots n.$$

$$\overline{S}(P;f)=\sum_{k=1}^{n} M_k|\Delta_k|.$$

Предположим, что P', $P'\supset P$, - более мелкое по сравнению с P разбиение отрезка $[a,b]$. Какое из следующих условий обязательно выполняется

a) $\overline{S}(P';f)\le\overline{S}(P;f)$;

b) $\overline{S}(P';f)\ge\overline{S}(P;f)$;

c) $\overline{S}(P';f)=\overline{S}(P;f)$;

d) возможно любое из соотношений.

Лекция 24.

1. Пусть функция f - ступенчатая и равна нулю вне отрезка $[a,b]$. Обязательно ли существует точка $c \in [a,b]$ такая, что
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = f(c)(b-a)$$
2. Пусть функция f непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a,b]$. Сколько существует точек $c \in [a,b]$ таких, что
$$\int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$$
   a) ни одной;
   b) одна;
   c) конечное число;
   d) бесконечное число.
3. Пусть функция f ограничена и для любого достаточно малого $\delta > 0$ интегрируема на отрезках $[a+\delta, b]$. Является ли функция f обязательно интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$?
4. Пусть финитная ограниченная функция f имеет конечное число точек разрыва. Верно ли, что функция f может быть неинтегрируемой по Риману?
5. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,c]$ и монотонна на отрезке $[c,b]$. Верно ли, что функция f обязательно интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$?
6. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $1 \le f(x) \le 2$. Будет ли функция
$$y = \frac{1}{f(x)}$$
обязательно интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$?

Лекция 25

1. Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и разрывна в точке $c \in [a,b]$. Может ли функция F,
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
оказаться дифференцируемой в точке c?
2. Пусть f - ступенчатая функция, f=0 вне отрезка $[a,b]$. Будет ли функция F,
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
обязательно дифференцируемой на $[a,b]$?
3. Пусть функция f непрерывна и не убывает на отрезке $[a,b]$. Верно ли, что функция F,
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
обязательно выпукла на отрезке $[a,b]$?
4. Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и функция F,
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
не убывает на $[a,b]$. Верно ли, что функция f обязательно удовлетворяет неравенству $f(x) \geq 0$ во всех точках отрезка $[a,b]$?
5. Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$ и $g(x)>0$ на $[a,b]$. Верно ли, что найдется точка $c \in [a,b]$, такая, что
$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$. Верно ли, что обязательно существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$\int_a^c f(x)dx = 0.$$

7. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$. Верно ли, что обязательно существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$\int_a^c f(x)dx = 0 \text{ или } \int_c^b f(x)dx = 0.$$

Лекция 26.

1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, F – первообразная функции f, а F_1 - первообразная функции $|f|$ на $[a,b]$. Верно ли, что справедливо неравенство
$$|F(b)-F(a)| \le F_1(b)-F_1(a).$$
2. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$, F - первообразная функции f, а F_1 - первообразная функции $|f|$ на $[a,b]$. Верно ли, что может выполниться равенство
$$|F(b)-F(a)| = F_1(b)-F_1(a).$$
3. Пусть функция f не убывает на отрезке $[a,b]$ и $f \ge 0$ на этом отрезке, а функция g интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Верно ли, что существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что справедлива формула
$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$
4. Можно ли в заключительной формуле второй теоремы о среднем значении заменить $f(a)$ на $f(a+0)$ и $f(b)$ на $f(b-0)$?
5. Можно ли в заключительной формуле второй теоремы о среднем значении заменить $f(a)$ на любое значение A, $A \le f(a+0)$, а $f(b)$ заменить на любое значение B, $B \ge f(b-0)$?
6. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция g интегрируема по Риману на этом отрезке. Верно ли, что существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что справедлива формула
$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$
7. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция g интегрируема по Риману и $g \ge 0$ на этом отрезке. Верно ли, что существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что справедлива формула
$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$
8. Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$, $g \ge 0$ на этом отрезке и

$$\int_a^b g(x)dx = 0.$$

Может ли выполниться неравенство

$$\int_a^b (fg)(x)dx > 0.$$

Лекция 27.

1. Пусть функция f - четная, $f(x) = f(-x), x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим несобственные интегралы Римана

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Какие из следующих условий справедливы

a) сходимость первого интеграла влечет сходимость второго интеграла;
b) сходимость второго интеграла влечет сходимость первого интеграла;
c) оба интеграла сходятся или расходятся одновременно;
d) сходимость первого и второго интегралов не связаны между собой.

2. Пусть функция f - нечетная, $f(x) = -f(-x), x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим несобственные интегралы Римана

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Какие из следующих условий справедливы

a) сходимость первого интеграла влечет сходимость второго интеграла;
b) сходимость второго интеграла влечет сходимость первого интеграла;
c) оба интеграла сходятся или расходятся одновременно;
d) сходимость первого и второго интегралов не связаны между собой.

3. Пусть функция f - нечетная, $f(x) = -f(-x), x \in \mathbb{R}$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b]$. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

сходится в смысле главного значения?

4. Пусть функция f непрерывна на полуоси $[a,\infty)$ и несобственный интеграл Римана

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

сходится. Верно ли, что обязательно $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

5. Пусть функция *f* непрерывна и монотонна на полуоси $[a,\infty)$ и несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

сходится. Верно ли, что обязательно $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$?

6. Пусть периодическая функция *f* непрерывна на числовой оси и не равна тождественно нулю. Может ли несобственный интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

сходиться?

7. Пусть функция *f* непрерывна на числовой оси, не равна тождественно нулю и периодична. Может ли несобственный интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

сходиться в смысле главного значения?

8. Пусть $f=\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \chi_{[n-1,n)}$. Рассмотрим несобственный интеграл Римана

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

и числовой ряд

$$\sum \lambda_n$$

Какие из следующих условий справедливы

a) сходимость несобственного интеграла влечет сходимость числового ряда;
b) сходимость числового ряда влечет сходимость несобственного интеграла;
c) несобственный интеграл и числовой ряд сходятся или расходятся одновременно;
d) сходимость несобственного интеграла и числового ряда не связаны между собой.

Лекция 28.

1. Пусть для фиксированного a и любого $b>a$ функция f интегрируема по Риману на отрезке [a,b] и выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b \forall b' b' > b \Rightarrow \left| \int_{b'}^{b'+1} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Верно ли, что это условие является

a) необходимым;
b) достаточным;
c) необходимым и достаточным;
d) ни необходимым, ни достаточным для сходимости несобственного интеграла Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx .$$

2. Пусть для фиксрованного a и любого $b>a$ функция f интегрируема по Риману на отрезке [a,b]. Рассмотрим несобственные интегралы Римана

$$\int_a^\infty |f(x)|dx .$$

Какое из следующих утверждений справедливо

a) сходимость первого интеграла влечет сходимость второго интеграла;
b) сходимость второго интеграла влечет сходимость первого интеграла;
c) оба интеграла сходятся или расходятся одновременно;
d) сходимость этих интегралов не связана между собой.

3. Пусть при фиксированном a и любом $b>a$ функция f интегрируема по Риману на отрезке [a,b]. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся несобственные интегралы Римана

$$\int_a^\infty f^+(x)dx \text{ и } \int_a^\infty f^-(x)dx.$$

4. Пусть функция f непрерывна на [a, ∞) и несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

абсолютно сходится. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f^2(x)dx$$

обязательно сходится?

5. Пусть функция f непрерывна на [a, ∞)$ и несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

абсолютно сходится. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty \sqrt{|f(x)|}dx$$

обязательно сходится?

6. Пусть функция $f \geq 0$ непрерывна на полуоси [a, ∞) и

$$\lim_{x\to\infty} f(x)x\log x = 1.$$

Какое из следующих условий справедливо: несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

a) сходится;
b) расходится.

7. Пусть функция f непрерывна на $[e, \infty)$ и несобственный интеграл Римана

$$\int_e^{\infty} f(x)dx$$

абсолютно сходится. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_e^{\infty} \frac{f(x)}{\log x}dx$$

обязательно абсолютно сходится?

8. Пусть функция f непрерывна на $[e,\ \infty)$ и несобственный интеграл Римана

$$\int_e^{\infty} f(x)dx$$

абсолютно сходится. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_e^{\infty} f(x)\log x dx$$

обязательно абсолютно сходится?

Лекция 29.

1. Верно ли, что числовой ряд

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$?

2. Верно ли, что числовой ряд

$$\sum \frac{1}{n \log^p n}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$?

3. Пусть несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

условно сходится. Какое из следующих утверждений о несобственных интегралах Римана

$$\int_a^\infty f^+(x)dx \text{ и } \int_a^\infty f^-(x)dx$$

справедливо

a) оба сходятся;
b) оба расходятся;
c) один сходится, другой расходится;
d) возможны несколько из перечисленных случаев.

4. Пусть первый из несобственных интегралов Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ и } \int_a^\infty g(x)dx$$

абсолютно сходится, а второй - условно сходится. Какое из следующих утверждений о несобственном интеграле Римана

$$\int_a^\infty (f+g)(x)dx$$

справедливо

a) абсолютно сходится;
b) условно сходится;
c) расходится;
d) возможны несколько из перечисленных случаев.

5. Пусть оба несобственных интеграла Римана

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ и } \int_a^\infty g(x)dx$$

условно сходятся. Какое из следующих утверждений о несобственном интеграле Римана

$$\int_a^\infty (f+g)(x)dx$$

справедливо

a) абсолютно сходится;
b) условно сходится;
c) расходится;
d) возможны несколько из перечисленных случаев.

6. Пусть функции f и g монотонны на полуоси $[a,\infty)$ и

$$\lim_{x\to\infty} f(x)dx = 0 \text{ и } \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_a^\infty (fg)(x)dx$$

обязательно сходится?

7. Пусть функции f и g монотонны на полуоси $[1,\infty)$ и числовой ряд

$$\sum g(n)$$

сходится. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_a^{\infty}(fg)(x)dx$$

обязательно сходится?

8. Пусть функции f и g монотонны и ограничены на полуоси $[1,\infty)$ и числовой ряд

$$\sum g(n)$$

сходится. Верно ли, что несобственный интеграл Римана

$$\int_a^{\infty}(fg)(x)dx$$

обязательно сходится?

Лекция 30.

1. Пусть $y = L_2(x; f)$ - интерполяционный многочлен Лагранжа функции f для точек x_0, x_1 и x_2. Верно ли, что для всех $x \in R$ справедливы равенства

$$L_2(x; \alpha f) = \alpha L_2(x; f), \alpha \in R,$$

и

$$L_2(x; f + g) = L_2(x; f) + L_2(x; g).$$

2. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, и L_2 - интерполяционный многочлен Лагранжа функции f для точек x_0, x_1 и x_2. Какое из следующих утверждений справедливо
   a) $L_2(x)$ - многочлен второй степени, совпадающий с f;
   b) $L_2(x)$ - многочлен второй степени, не совпадающий с f;
   c) степень многочлена $L_2(x)$ меньше двух;
   d) возможны несколько из перечисленных случаев.
3. Пусть f - четная функция, $f(x) = f(-x), x \in R$, и L_2 - ее интерполяционный многочлен Лагранжа для точек -1, 0 и 1. Верно ли, что L_2 является четным многочленом?
4. Пусть f- нечетная функция, $f(x) = -f(-x), x \in R$, и L_2 - ее интерполяционный многочлен Лагранжа для точек -1, 0 и 1. Верно ли, что $L_2(x) = kx$ с некоторым коэффициентом k?

Лекция 31.

1. Пусть f - линейная функция, $f(x) = ax + b$. Верно ли, что формула прямоугольников для функции f обязательно дает точное значение интеграла
$$\int_a^b f(x)dx.$$
2. Пусть f - линейная функция, $f(x) = ax + b$. Верно ли, что формула трапеций для функции f обязательно дает точное значение интеграла
$$\int_a^b f(x)dx.$$
3. Пусть f - квадратичная функция, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Верно ли, что формула прямоугольников для функции f обязательно дает точное значение интеграла
$$\int_a^b f(x)dx.$$
4. Пусть f - квадратичная функция, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Какое из следующих утверждений справедливо для погрешности r_{1n} приближенного вычисления интеграла
$$\int_a^b f(x)dx.$$
по формуле трапеций
   a) $r_{11} > 0$;
   b) $r_{11} < 0$;
   c) $r_{11} = 0$;
   d) возможны несколько из перечисленных случаев.

Лекция 32.

1. Пусть f - квадратичная функция, $f(x)dx = ax^2 + bx + c$. Верно ли, что формула Симпсона обязательно дает точное значение интеграла
$$\int_a^b f(x)dx.$$
2. Пусть f - кубическая функция, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Верно ли, что формула Симпсона обязательно дает точное значение интеграла
$$\int_a^b f(x)dx.$$
3. Пусть f - четная функция, $f(x)=f(-x)$, $x \in [-b, b]$. Обозначим через r_2 погрешность при вычислении по формуле Симпсона интеграла
$$\int_{-b}^b f(x)dx,$$
а через $r_{2л}$ и $r_{2п}$ обозначим соответственно погрешности при вычислении по формуле Симпсона интегралов
$$\int_{-b}^0 f(x)dx \text{ и } \int_0^b f(x)dx.$$
Какое из следующих утверждений справедливо
   a) $r_{2л} + r_{2п} = r_2$;
   b) $r_{2л} + r_{2п} < r_2$;
   c) $r_{2л} + r_{2п} > r_2$;
   d) возможно несколько из перечисленных случаев

“МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ”

Авторский курс профессора Прохорова Д.В.

Руководитель проекта – доцент Мельникова Н.И.

2002

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

факультет компьютерных наук и информационных технологий

кафедра теоретических основ информатики и информационных технологий