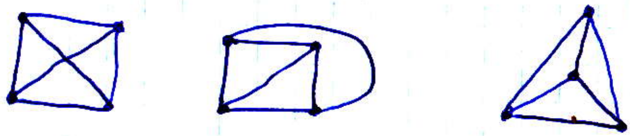
Следствие: с точностью до изоморфизма $\exists!$ максим. плоский граф с $n=5$, получается из K_5 удалением любого ребра.

Орграф $\overline{G}$ считается планарным, если планарна его симметризация

$G(V, (\alpha \cup \alpha'') - \Delta)$

K_4 

Теорема Фари

Каждый планарный граф допуск. плоское изображение, в котором любое ребро является отрезком прямой.

§ 3. Эйлеровы и Гамильтоновы графы.

В m реберном графе длина любого пути $\leq m$

Путь длины m в G наз-тся эйлеровым путем, а граф с эйлер. путем Эйлеров. Очевидно, что такой граф связный

Т Критерий Эйлеровости графа. (1736г).

Связный граф $\Leftrightarrow$ является Эйлеровым, когда все его вершины четны.

Док-во:

необх a) Пусть G - эйлеров граф. Начнем движение по этому пути с v_0 Входя в каждую промеж. вершину мы должны выйти из нее по ещё непройденному. Т.е. вход-выход (попарно) Завершив путь окажемся в v_0 и последн. пройденное ребро —

б.) Пусть в G все вершины четны. Выберем произв. V и будем двигаться по ребрам графа, окрашивая его в красный цвет. Т.к. все вершины графа четны, войдя в каждую из них мы имеем возможность выйти по неокрашенному ребру. Окраш. ребра имеют циклич. путь C_1. Пусть в G имеется неокраш ребро. В силу связности графа предположим, что одна из вершин $\in G_1$, ...

Следствие: Для того, чтобы в связном G $\exists$ эйлеров путь, соединяющий u, v $\overset{\text{н и д}}{\Longleftrightarrow}$, чтобы u и V были ! нечетными вершинами графа G.

Док-во:

а) Пусть в G имеется Эйлеров путь, соединяющ. u и V. Двигаясь по этому пути убеждаемся, что кол-во рёбер четно, которым принадлежат промеж. вершины четно. У u ребер захода больше на 1. $d(u)$ - нечетно.

б) Р-м G -связный и пусть u, v - ! нечетные вершины. Два случая:

I. u, v -смежны в G, удалим это ребро (u,v), Пусть после этого получим связный граф, все вершины которого четны $\Rightarrow$ $\exists$ циклич. Эйлеров путь Проделаем этот путь из u в V. Т.О. вершины u, v соединены эйлеровым путем.

Граф распался на 2 связные компоненты, в каждой из них все вершины четны, т.е. $\exists$ циклич. эйлеров путь $u C_1 u V C_2 V$

II. u, V не смежны в G. Соединим их ребром,

В полученном графе $\overline{G}$ все вершины четны $\Rightarrow$ граф эйлеров. Р-м эйлеров цикл. путь в $\overline{G}$ из V.
первое ребро (V,u)
Если из него убрать ребро (V,u), получим эйлеров путь м-ду V и U в этом графе.

Линия, которую можно начертить не отрывая карандаш от бумаги и не проходя никакого участка более одного раза - уникурсальная. Изображение эйлер. графа - уникурсальная линия

Простой путь в n-вершинном графе имеет длину $\leq n$. Простой путь длины n наз-тся гамильтоновым циклом, граф - Гамильтонов.
Гамильтонов цикл проходит через каждую вершину графа ровно 1раз.

Т. Достаточное условие Гамильтоновости (Оре, 1960)
Если в связном n-вершинном графе ($n \geq 3$) $\forall$ u, v - несмежных вып-тся нер-во $d(u) + d(v) \geq n$, то этот граф Гамильтонов.

Док-во:

Р-м некий граф G, удовлетворяющий услов

теоремы. Р-м наибольшую по длине цепь P. $v_0, v_1, \dots, v_k$. В силу максимальности P вершина (v_k) v_0 смежна только с вершинами из цепи P.

Пусть степень $d(v_0) = p$. Через $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}$ обозначим вершины, смежные с v_0 и $(i_1 < i_2 < \dots < i_p)$

Р-м вершины вида $v_{i_s - 1}$, где $1 \le s \le p$

Вершин предшественников цепи p штук. Остальных вершин $- (k+1)-p$ При этом $k-p$ из них могут быть концами ребер, исходящих из v_k. Все, кроме самой v_k.

$d(v_0) + d(v_k) \ge n$.

$d(v_k) \ge n - d(v_0) = n - p \ge (k+1) - p = \underline{(k-p)+1}$

Т.к. из v_k в вершину цепи p ведет не менее $(k-p)+1$ ребра, то по крайней мере одно из них имеет вершину вида $v_{i_s - 1}$

Обозначим её за $v_{i_t - 1}$

Тогда подграф G_0 графа G, порожденный цепью P будет Гамильтоновым, вида:

$C = v_0 P v_{i_t - 1} v_n P v_{i_t} v_0$